

**Caracterização e Coloração de Arestas para
Cografos**

Marcelo Marcos Barbosa

Dissertação de Mestrado

9823232

Caracterização e Coloração de Arestas para Cografos

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação devidamente corrigida e defendida
por Marcelo Marcos Barbosa e aprovada pela
Banca Examinadora.

Campinas, 25 de março de 1998.

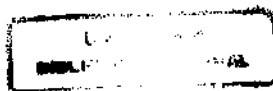


Célia Picinin de Mello (Orientadora)



João Meidanis (Co-orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial para
a obtenção do título de Mestre em Ciência da
Computação.



Caracterização e Coloração de Arestas para Cografos

Marcelo Marcos Barbosa¹

Março de 1998

Banca Examinadora:

- Célia Picinin de Mello (Orientadora)
- Celina M. H. de Figueiredo
Instituto de Matemática - UFRJ
- Ricardo Dahab
Instituto de Computação - Unicamp
- Arnaldo Moura (Suplente)
Instituto de Computação - Unicamp

¹O autor é Bacharel em Informática pela Universidade Federal de Viçosa.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Barbosa, Marcelo Marcos

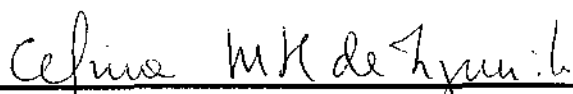
B234c Caracterização e coloração de arestas para cografos / Marcelo
Marcos Barbosa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientadores : Célia Picinin de Mello, João Meidanis

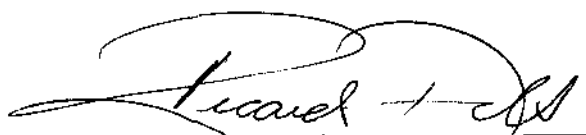
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Teoria da computação. I. Mello, Célia
Picinin de. II. Meidanis, João. III. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Computação. IV. Título.

Tese de Mestrado defendida e aprovada em 17 de abril de 1998
pela Banca Examinadora composta pelos professores Doutores



Prof.ª Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo



Prof. Dr. Ricardo Dahab



Prof.ª Dra. Célia Picinin de Mello

© Marcelo Marcos Barbosa, 1998.
Todos os direitos reservados.

Dedico este texto a Ignês L. Barbosa.

Agradecimentos

Agradeço profundamente aqueles que me incentivaram direta ou indiretamente.

Agradeço à Célia pela paciência e pela compreensão em alguns momentos difíceis.

Agradeço àqueles meus amigos que foram essenciais durante o mestrado: Marilhão, Freud, Pavão, Gandhi, Ralph, André, Marisi, Zé Marcos, Patrícia, Amanda, Selma, Cristina, Cristiane, Sávio, Luciano, Alessandra, Flávio, Jean, Vladimir, Rodrigo, Luciane, Sapo, Karine, Elizângela, Judith, Simone e muitos outros que fizeram parte de minha vida nestes últimos anos.

Agradeço à Tia Marina, Tia Laura, Tia Marily, Chris Matallo e todos os amigos da academia pelos momentos de descontração que passamos juntos.

Agradeço à minha mãe, irmãos, irmãs, sobrinhos e cunhado por todo o apoio e compreensão.

Agradeço a Deus pela conclusão deste trabalho e por ter colocado no meu caminho tantas pessoas especiais.

Obrigado a todos.

Resumo

Esta dissertação aborda o assunto Coloração de Arestas (Problema da Classificação) restrita aos cografos, onde o problema está em aberto.

Após uma breve compilação de resultados de pesquisas tanto em coloração de arestas como em cografos, encontram-se os resultados obtidos para uma subclasse obtida ao limitarmos o número de níveis da *cotree* para 3:

- Ser subgrafo *overfull* é equivalente a ser *overfull* ou vizinhança *overfull* e
- Algoritmos que colocam na *Classe 1* subconjuntos desta subclasse obtidos ao limitarmos o número de ramos da *cotree* para 2.

Abstract

This dissertation is on the subject of Edge Colouring (Classification Problem) restricted to cographs, for which the problem is open.

After a brief compilation of research results on edge colouring and cographs, the results found for a subclass obtained when the number of levels of the cotree is limited to three:

- Being subgraph overfull is equivalent to being overfull or neighborhood overfull and
- Algorithms that place into *Class 1* some subsets of this subclass obtained when the number of the branches of the cotree is limited to two.

Conteúdo

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	1
1.1 Conceitos e definições	3
2 Histórico	7
2.1 Snarks	9
2.2 Snarks e outras conjecturas	12
2.3 Resumo	14
3 Grafos Overfull	15
3.1 Condições suficientes para um grafo ser Overfull	15
3.2 Algoritmos de Verificação	17
3.3 A Conjectura de Hilton e Chetwynd	23
3.4 Grafos Multipartidos Completos	24
3.4.1 Grafo das cores livres	24
3.4.2 Colorindo os multipartidos que não são O	26
3.5 Resumo	27
4 Cografos	30
4.1 Nomenclatura	32
4.2 Caracterização	33
4.3 Algoritmo para reconhecimento da classe	36
4.4 Cografos \times TSP	39
4.5 Algoritmos Polinomiais	40
4.6 Cografos e a Conjectura de Hilton	43

4.6.1	Coloração de Arestas - Resultados Iniciais	44
4.7	Resumo	48
5	Cografos que são Subgrafo Overfull	49
5.1	Cografo de cotree completa de nível 3 - CCC3	49
5.1.1	CCC3 Overfull	51
5.1.2	CCC3 Subgrafo-Overfull	52
5.1.3	Comentários	56
5.2	Resumo	57
6	Coloração de Arestas para Cografos $abcd$ que não são SO	58
6.1	Redução	58
6.2	Coloração ideal	63
6.2.1	Coloração do Bipartido $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$	64
6.2.2	Coloração das Cliques de $\alpha_H(1)$ e de $\alpha_H(2)$	66
6.2.3	Cografos $abcd$ com $a > b$ e $a(1) \leq a(2)$	71
6.2.4	Cografos $abcd$ com a ímpar ou $a > b$ e $d \geq a + b$	76
6.2.5	Cografos $abcd$ com $a > b$ e $a(1) > a(2)$	80
6.2.6	Cografos $abcd$ com a par e $a = b$	82
6.2.7	Cografos $abcd$ com $a = b = 2$	89
6.2.8	Cografos $abcd$ com $a = b$ e $c = d$	94
6.3	Comentários	97
6.4	Resumo	97
7	Conclusões	99
	Bibliografia	100

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

1.1	Um grafo de $\Delta = 3$ e duas possíveis colorações, $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C_2 = \{1, 2, 3\}$	4
1.2	Exemplo de grafo multipartido completo com três partições.	5
2.1	Coloração das regiões de um mapa e a equivalência com coloração das arestas.	8
2.2	Coloração das arestas de um mapa e a equivalência com coloração das regiões.	8
2.3	Construção de um mapa trivalente.	9
2.4	Mapas ligados por pontes.	9
2.5	Grafo de <i>Petersen</i> - o primeiro snark.	10
2.6	Os dois primeiros <i>snarks</i> flores.	10
2.7	Construção de $G \cdot H$	11
2.8	Composição do <i>snark</i> $G \cdot G$	11
2.9	Primeiro <i>snark</i> da família de <i>M. Goldberg</i>	12
2.10	Exemplo de um supersnark.	13
2.11	Contra-exemplo para a conjectura dos grafos críticos.	14
3.1	Diagrama de inclusões entre O , SO , NO e <i>Classe 2</i>	16
3.2	Grafo de <i>Petersen</i> sem um de seus vértices.	17
3.3	Construção de \hat{G}	18
3.4	Exemplo de grafo com dois subgrafos <i>overfull</i>	22
3.5	Coloração de arestas para K_5	25
3.6	Coloração de arestas para K_6 usando grafo das cores livres.	25
3.7	Grafo multipartido G e sua construção quase regular G'	27
3.8	Coloração equitativa para G' usando $\Delta(M) = 8$ cores.	28
3.9	Grafo das cores livres de G' , $\Delta(D_{G'}) = 2$ cores.	29
3.10	Coloração com $\Delta(M) = 8$ para M , gerada pelo grafo das cores livres.	29
4.1	Construção de um cografo usando a definição recursiva.	31
4.2	Exemplo de um cografo e sua respectiva <i>cotree</i>	31
4.3	Algumas classes de grafos e a complexidade em relação ao índice cromático. $A \rightarrow B$ indica que $B \subset A$	32

4.4	Grafo orientado proibido para a família dos grafos TSP.	39
4.5	Exemplo de um TSP e sua árvore de representação.	40
4.6	Exemplo de cografo desconexo G com 12 vértices e $\Delta(G) = 4$	44
4.7	<i>Cotree</i> do grafo multipartido completo $K_{3,2,2}$	45
4.8	Cotrees de grafos <i>overfull</i>	45
4.9	Família de grafos <i>overfull</i> - exemplos G_0 (envelope), G_1 , G_k	46
4.10	Cografo <i>overfull</i> que não pertence a F	47
4.11	Exemplo de uma <i>cotree</i> de cografo com vértice universal.	47
5.1	Árvore completa de nível 3.	50
5.2	Cografo com as partições ordenadas por $p(i, j)$ e $p(i)$. O elemento $\beta(1, 1)$, indicado na figura, contém os vértices de grau Δ	51
5.3	Cografo de <i>cotree</i> completa de nível 3 e <i>overfull</i> com $a(1) = 5$, $a(2) = 4$, $b(1, 1) = 3$, $b(1, 2) = 2$, $b(2, 1) = 2$ e $b(2, 2) = 2$	52
5.4	Cografo SO de <i>cotree</i> completa de nível 3.	53
5.5	<i>Cotree</i> de G e <i>cotree</i> de $H = G \setminus \beta(1, 2)$, respectivamente.	53
5.6	Grafo G e o subgrafo induzido H com $ V(G) \setminus V(H) > 0$	55
5.7	Conjuntos O , SO , NO e <i>Classe 2</i> e os grafos de <i>cotree</i> completa de nível 3.	57
5.8	O subgrafo $G[V(G) \setminus \beta(1, 4)]$ é <i>overfull</i>	57
6.1	G possui $p_G(1) < p_G(2)$ mas $\alpha_{G'}(2) = \alpha_G(1)$ e $\alpha_{G'}(1) = \alpha_G(2)$	60
6.2	$\alpha(G) = \alpha(G')$ e $\Delta(G) < \Delta(G')$	61
6.3	Os conjuntos hachurados contém os Δ -vértices de G e de G'	62
6.4	Uma coloração para 3235 com $\Delta(3245) = 11$ cores.	64
6.5	Coloração para 3245.	65
6.6	Clique de tamanho 4 pintada usando o Algoritmo Pinta Clique e a matriz M	68
6.7	Exemplo de troca de cor de duas arestas de $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$	86
6.8	Uma coloração para 2243 com $\Delta(2253) = 9$ cores.	90
6.9	Uma coloração para 2253.	91
6.10	Coloração usando Δ cores para o cografo 2243.	95
6.11	Cografo 3344 e a partição de suas arestas.	95
6.12	Grafos $abcd$ com $a = b$ e a situação em relação a coloração de arestas.	98
6.13	Grafos $abcd$ com $a > b$ e a situação em relação a coloração de arestas.	98

Capítulo 1

Introdução

Dentre os problemas mais pesquisados em *Teoria dos Grafos* temos o problema de *coloração* de grafos. Este problema pode ser definido como descobrir o número mínimo de cores necessário para colorir o conjunto de vértices ou de arestas de um grafo de forma que dois vértices (ou duas arestas) adjacentes possuam cores distintas.

Colorir vértices ou arestas de grafos é um problema considerado difícil. Por este fato, vários pesquisadores de todo o mundo possuem suas pesquisas voltadas para o problema da coloração restrito a uma determinada classe de grafos.

Um dos problemas envolvendo coloração de grafos mais conhecidos foi a **conjectura das quatro cores**. Esta conjectura dizia que qualquer mapa podia ter suas regiões pintadas usando no máximo quatro cores.

A conjectura das quatro cores, após mais de cem anos de pesquisa, foi mostrada ser verdadeira pelos pesquisadores *K. Appel* e *W. Haken* em 1976.

Quase cem anos antes desta prova ser exibida, *P. G. Tait* escreveu o primeiro artigo sobre coloração clássica de arestas, publicado em 1880. Neste artigo, *P. G. Tait* mostrava que a conjectura das quatro cores é verdadeira se e somente se as arestas de todo grafo planar 3-regular sem aresta de corte (mapa) podem ser coloridas usando apenas três cores. Na verdade, *P. G. Tait* provou a equivalência entre o problema das quatro cores e o problema da coloração de arestas de um mapa.

Outros resultados significativos foram apresentados por *D. König* em 1916. O cientista exibiu um teorema que prova que todo grafo bipartido de grau máximo Δ pode ter suas arestas coloridas com Δ cores.

Em 1949, *C. E. Shannon* provou que um multigrafo de grau máximo Δ tem uma coloração com $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ cores para suas arestas.

Sem dúvida, o resultado mais importante sobre coloração de arestas apareceu em 1964, quando *V. G. Vizing* mostrou que o número de cores mínimo necessário para colorir as arestas de um grafo G (índice cromático, $\chi'(G)$) é igual a seu maior grau ($\Delta(G)$) ou igual

a seu maior grau acrescido de um ($\Delta(G) + 1$). O problema, a partir daí, é o de verificar se um grafo G tem índice cromático igual a $\Delta(G)$ ($G \in \text{Classe 1}$), ou se G tem índice cromático igual a $\Delta(G) + 1$ ($G \in \text{Classe 2}$) - o *Problema da Classificação*.

Decidir qual entre somente duas classes um grafo (ou uma família de grafos) está parece ser um problema trivial. Em 1981, *I. Holyer* ([15]) provou que dada uma instância C do problema 3SAT, consegue-se construir um grafo cúbico G pertencente à *Classe 1* se e somente se C é satisfatível. Neste artigo, *I. Holyer* exhibe uma redução polinomial do problema 3SAT ao problema de encontrar o índice cromático de um grafo cúbico. Isso nos mostra que o Problema da Classificação, apesar de ser aparentemente simples, é um problema NP-completo.

Alguns pesquisadores resolveram o Problema da Classificação para vários grafos, como Grafos Bipartidos (*D. König* ([12]), citado acima), Grafos Circuitos ([12]), Grafos Completos ([12]), Grafos Roda, Grafos Split-Indiferença ([19]), grafos duplamente cordais com grau máximo ímpar ([8]), grafos split com grau máximo ímpar ([3]), grafos multipartidos completos ([14]) entre outros. Uma forma de resolver o problema para grafos que *suspeita-se* estarem na *Classe 1* é exibir uma coloração usando Δ cores para estes grafos. Já para grafos que *suspeitamos* estarem na *Classe 2* não é suficiente exibir uma $(\Delta + 1)$ -coloração, uma vez que os grafos que pertencem à *Classe 1* também são $(\Delta + 1)$ -coloráveis. Portanto, para se afirmar que um dado grafo pertence à *Classe 2* é necessário encontrar algum argumento que demonstre que não pertence à *Classe 1*. Um argumento muito usado é a contagem (Capítulo 3).

A contagem das arestas de um dado grafo pode nos permitir classificá-lo. Se este grafo possui uma quantidade de arestas que o impeça de ser colorido com Δ cores, obviamente este grafo pertence à *Classe 2*. Um grafo que ultrapasse este limite de número de arestas é chamado de *overfull*. Uma importante conjectura levantada por *Hilton* e *Chetwynd* afirma que um grafo com $\Delta > \frac{n}{3}$ pertence à *Classe 2* se e somente se possui um subgrafo *overfull* com mesmo Δ . Obviamente, se o subgrafo é *overfull*, então o grafo pertence à *Classe 2*.

Ser *overfull* não é uma condição necessária para um grafo pertencer à *Classe 2*. Existem grafos que pertencem à *Classe 2* e não são *overfull*.

Uma família de grafos cuja classificação não é conhecida é a dos cografos. Estes são grafos que não contém P_4 como subgrafo induzido. Para os grafos de comparabilidade, uma classe que contém os cografos, o Problema da Classificação foi provado ser NP-Completo ([2]). Por outro lado, esse problema está resolvido para os grafos multipartidos completos uma subclasse dos cografos ([14]).

Esta motivação nos levou a considerar os cografos. Além disso, mostramos que todo cografo conexo possui $\Delta \geq \frac{n}{2}$. Assim sendo, são grafos que poderiam ser usados para exibir mais uma evidência para a Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd*.

Estes fatos nos levaram a estudar os cografos de duas formas: exibindo coloração com

Δ cores para alguns cografos e caracterizando, para uma certa subclasse dos cografos, aqueles que possuem um número excessivo de arestas que os impeçam de pertencer à *Classe 1*. Para isto, usamos o fato de que os cografos podem ser representados de forma única por uma árvore chamada de *cotree*. Os níveis desta árvore representam subclasses dos cografos. Assim, sendo a raiz no nível 0, temos que os grafos completos são cografos de *cotree* completa de nível 1 e os multipartidos completos são cografos de *cotree* de nível no máximo 2. Para cografos com *cotree* completa de nível 1 ou de nível 2, as abordagens citadas anteriormente estão solucionadas.

Os resultados que obtivemos nesta dissertação de mestrado se referem aos cografos representados por *cotrees* de nível 3.

O Capítulo 2 além de relatar um histórico sobre coloração de arestas apresentando algumas conjecturas e problemas clássicos sobre o tema, comenta sobre algumas famílias de grafos que pertencem à *Classe 2* e não são *overfull*, os *snarks*.

O Capítulo 3 define e exhibe alguns resultados para grafos que são *overfull*. Neste capítulo também encontramos a Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd* e uma família de grafos que satisfaz esta conjectura.

O Capítulo 4 contém resultados sobre cografos encontrados na literatura. Neste capítulo encontramos as características da família dos cografos, algoritmos polinomiais para problemas clássicos e um algoritmo polinomial para reconhecimento da classe.

O Capítulo 5 exhibe o nosso resultado que afirma que o subgrafo *overfull* de mesmo Δ de um cografo de *cotree* completa de nível 3 se existir é igual ao próprio grafo ou é igual a vizinhança de algum vértice de grau Δ . Para a prova deste resultado desenvolvemos uma nomenclatura (Capítulo 4) usando a *cotree* de um cografo.

O Capítulo 6 contém algoritmos que usam técnicas que desenvolvemos para colorir com Δ cores alguns cografos de *cotree* de nível 3 que não são *SO*.

1.1 Conceitos e definições

Neste texto serão consideradas as definições abaixo.

Definição 1 Um grafo G é definido por um conjunto de pontos, $V(G)$, chamados de **vértices** de G e por um conjunto de pares não ordenados, $A(G)$, chamados de **arestas** de G que conectam estes vértices de forma que $A(G) \subseteq V(G) \times V(G)$. Sejam $|V(G)| = n$ e $|A(G)| = m$. Quando G não possui arestas do tipo (x, x) , para $x \in V(G)$, nem arestas com ambos os extremos iguais, dizemos que G é um grafo **simples**.

Definição 2 Se G é um grafo que possui orientações em suas arestas, então G é dito ser um grafo **orientado** ou grafo **direcionado**. Neste caso, G é denotado por \vec{G} .

Definição 3 Dado um grafo direcionado \vec{G} , o **grafo subjacente** a \vec{G} é o grafo G tal que $V(G) = V(\vec{G})$ e $A(G)$ é igual as arestas de \vec{G} sem as orientações.

Definição 4 Dizemos que $H = (V(H), A(H))$ é um **subgrafo** de $G = (V(G), A(G))$ se H é um grafo, $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$.

Definição 5 O grafo H é um **subgrafo induzido** de G , denotado por $H = G[V(H)]$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $(x, y) \in A(H)$ se e somente se $x, y \in V(H)$ e $(x, y) \in A(G)$.

Definição 6 A cardinalidade de $V(G)$, n , também é chamada de **ordem** de G .

Definição 7 Uma **coloração** é uma função $f : A(G) \rightarrow C$. Um grafo é **k-colorível** se admite uma coloração com $|C| = k$.

Definição 8 Dizemos que uma coloração com as cores de um conjunto C é **válida** para as arestas de G se todo par de arestas incidentes a um mesmo vértice possuem cores diferentes. Se $|C| = p$, então temos uma p -coloração para G . Também dizemos que G é p -colorível. Se $|C|$ é o menor possível para colorir de forma válida as arestas de G , $|C|$ é o **índice cromático** de G , $\chi'(G)$.

A Figura 1.1 mostra o mesmo grafo colorido de duas formas; a segunda revela uma coloração ótima, conseqüentemente, seu índice cromático.

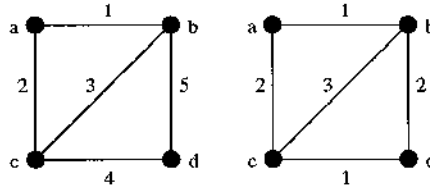


Figura 1.1: Um grafo de $\Delta = 3$ e duas possíveis colorações, $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C_2 = \{1, 2, 3\}$.

Definição 9 Uma coloração $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ para as arestas de G é dita ser **equitativa** se é válida e todo conjunto de arestas de mesma cor possui cardinalidade igual a $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ ou $\lceil \frac{m}{p} \rceil$.

Definição 10 Definimos por **vizinhança aberta** de $v \in V(G)$ em G , denotada por $N_G(v)$, ao conjunto de vértices em G que são adjacentes a v . A **vizinhança fechada** de v no grafo G , $N_G[v]$, é igual a $N_G(v) \cup \{v\}$. Com isso, temos que o **grau** do vértice v em G , $gr_G(v)$, é igual a cardinalidade de sua vizinhança aberta em G e que $\Delta(G) = \max\{gr_G(v_i)\}$, para $1 \leq i \leq n$.

No exemplo da Figura 1.1, $N_G(a) = N_G(d) = \{b, c\}$, ou seja, $gr_G(a) = 2$. O grau dos vértices b e c é igual a $\Delta(G)$.

Definição 11 Chamamos u de Δ -vértice de G se $u \in V(G)$ e $gr_G(u) = \Delta(G)$. Denotamos por $gr_G^*(u)$ o número de Δ -vértices que pertencem a $N_G(u)$.

No Figura 1.1, b e c são Δ -vértices, $gr_G^*(a) = gr_G^*(d) = 2$ e $gr_G^*(b) = gr_G^*(c) = 1$.

Definição 12 Se u é um Δ -vértice de G e $\sum_{w \in N_G(u)} gr_G(w) \geq \Delta(G)^2 - \Delta(G) + 2$, dizemos que u é um Δ -vértice especial de G .

Definição 13 Dizemos que dois vértices x e $y \in V(G)$ são **gêmeos falsos** se $N_G(x) = N_G(y)$. Se $N_G[x] = N_G[y]$, dizemos que x e y são **gêmeos verdadeiros**.

Ainda, na Figura 1.1, a e d são gêmeos falsos e b e c são gêmeos verdadeiros.

Definição 14 Dizemos que um grafo M é **multipartido completo** se $V(M)$ pode ser particionado em p subconjuntos, V_1, \dots, V_p , e $A(M)$ é tal que $(x, y) \in A(M)$ se e somente se $x \in V_i$ e $y \in V_j$, para todo $i \neq j$.

A Figura 1.2 exibe um grafo multipartido completo.

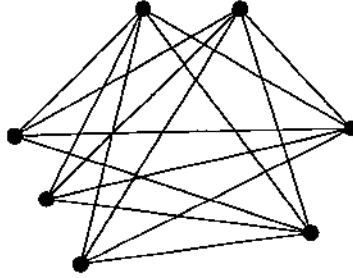


Figura 1.2: Exemplo de grafo multipartido completo com três partições.

Definição 15 Dizemos que G é uma **clique** se G é um multipartido completo em que $|V_i| = 1$, para $1 \leq i \leq p$, conforme Definição 14. Também chamamos uma clique de **grafo completo**.

Definição 16 Dizemos que $I \subseteq V(G)$ é um **conjunto independente** de G se e somente se $|A(G[I])| = 0$.

Definição 17 Dizemos que G é **regular** (ou **k -regular**) se $gr_G(v) = \frac{2|A(G)|}{|V(G)|} = k$, para todo $v \in V(G)$. Por outro lado, G é dito **quase regular** se e somente se $gr_G(v) = \lfloor \frac{2|A(G)|}{|V(G)|} \rfloor$ ou $gr_G(v) = \lceil \frac{2|A(G)|}{|V(G)|} \rceil$, para todo $v \in V(G)$.

O multipartido completo mostrado na Figura 1.2 é um grafo quase-regular.

Definição 18 Um grafo G é dito **planar** se G pode ser desenhado num plano sem intersecção de arestas.

Definição 19 Seja $S \in V(G)$ e $[S, \bar{S}]$ o conjunto de arestas que une S a $V(G) \setminus S$. Dizemos que $[S, \bar{S}]$ é um **corte** de G se $G \setminus [S, \bar{S}]$ é desconexo.

Definição 20 Dizemos que G possui **propriedade CK** se qualquer clique de G possui exatamente um vértice em comum com qualquer conjunto independente de G .

Definição 21 Chamaremos de **distância** entre dois vértices de G , x e y , ao número de arestas do menor caminho entre x e y . A maior dentre as distâncias de G é chamada de **diâmetro** de G .

Definição 22 Dizemos que G é um P_n se G é um caminho sem cordas de n vértices.

Definição 23 Chamamos de **cintura** ao número de vértices que induzem um ciclo maximal em um grafo.

Definição 24 Dizemos que um conjunto $E \subseteq A(G)$ é um **emparelhamento** se as arestas de E são duas a duas não adjacentes (não incidem num mesmo vértice).

Definição 25 Chamamos de **grafo linha** de G , denotado por $L(G)$, o grafo tal que $V(L(G)) = A(G)$ e $(x, y) \in A(L(G))$ se e somente se x e y são adjacentes em G .

Capítulo 2

Histórico

Seja G um grafo 3-regular. Se G é planar e não possui aresta de corte (Definição 19), então dizemos que G é um mapa.

Uma das perguntas feitas entre os pesquisadores em teoria dos grafos era qual o número de cores suficiente para se colorir as regiões de um mapa. Conjecturava-se que este número era quatro.

Em 1976, *K. Appel* e *W. Haken* provaram ser verdadeira esta conjectura. Mas quase 100 anos antes, em 1880, *P. G. Tait*, mostrava que a conjectura das quatro cores era verdadeira se e somente se o número de cores suficientes para se colorir as arestas de um mapa era três. Este foi o primeiro artigo cujo assunto era coloração de arestas.

Teorema 1 ([11, 13, 22]) *O problema das quatro-cores é equivalente a afirmação de que todo mapa pertence à Classe 1.*

Prova: (\Rightarrow) Suponha que G é um mapa e suas regiões foram coloridas com quatro cores: a , b , c e d .

Faça a coloração para as arestas de G da seguinte forma (observe que uma aresta sempre separa duas regiões do mapa):

- Se a aresta separa uma região de cor a e outra de cor b , ou uma de cor c e outra de cor d , dê a esta aresta a cor 1.
- Se a aresta separa uma região de cor a e outra de cor c , ou uma de cor b e outra de cor d , dê a esta aresta a cor 2.
- Se a aresta separa uma região de cor a e outra de cor d , ou uma de cor b e outra de cor c , dê a esta aresta a cor 3.

A Figura 2.1 mostra esta construção.

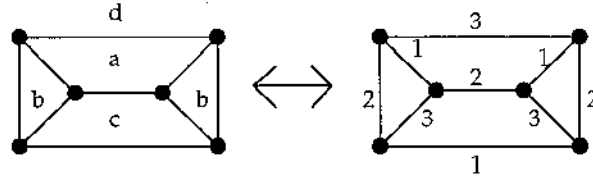


Figura 2.1: Coloração das regiões de um mapa e a equivalência com coloração das arestas.

Dessa forma as arestas de G são coloridas usando-se apenas 3 cores. Como $\Delta(G) = 3$, então $G \in \text{Classe 1}$.

(\Leftarrow) Suponha, que G é um mapa pertencente à *Classe 1*. Sejam o subgrafo gerado pelas arestas de cor 1 e 2 e o subgrafo gerado pelas arestas de cor 1 e 3. Estes subgrafos são ciclos. Faça:

- Pinte a região interna do primeiro subgrafo com a cor α e a parte externa com a cor β .
- Pinte a região interna do segundo subgrafo com a cor γ e a parte externa com a cor ρ .

A Figura 2.2 exibe esta coloração de regiões.

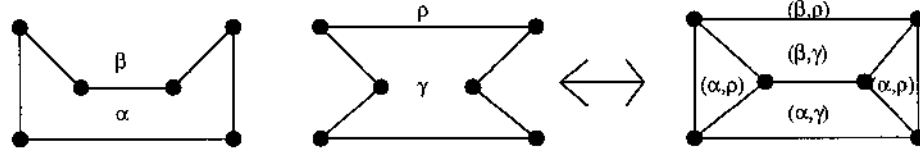


Figura 2.2: Coloração das arestas de um mapa e a equivalência com coloração das regiões.

A união dos ciclos definidos acima (sem considerar arestas repetidas) é igual ao grafo G . Associe a cada região um par de coordenadas (x, y) , onde $x \in \{\alpha, \beta\}$ e $y \in \{\gamma, \rho\}$.

Uma vez que as coordenadas de regiões adjacentes são distintas, conseguimos uma coloração com quatro cores para o mapa G definida pelas cores $\{(\alpha, \gamma), (\alpha, \rho), (\beta, \gamma), (\beta, \rho)\}$. \square

Para completar, neste mesmo artigo, *P. G. Tait* mostra como transformar qualquer mapa planar em um mapa planar 3-regular. Para cada vértice com grau $k > 3$ faça:

- Desenhe um círculo em torno deste vértice;
- Apague a região dentro deste círculo;
- Apague um dos k arcos do círculo, fazendo uma extensão de alguma região do mapa, criando, assim outros $k - 2$ outros vértices.

Ainda, vértices de grau 1 ou grau 2 podem ser desconsiderados num mapa, pois não formam regiões. A Figura 2.3 mostra esta construção.

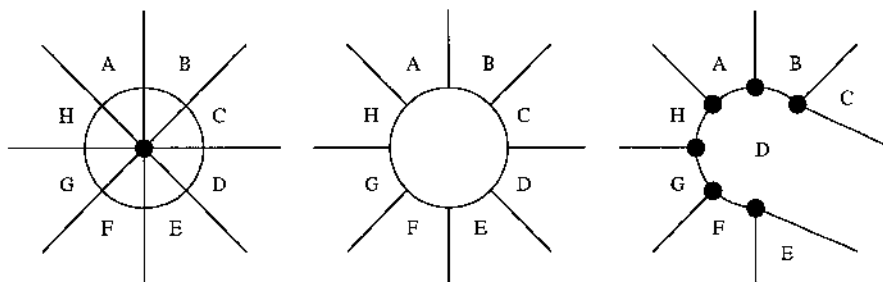


Figura 2.3: Construção de um mapa trivalente.

Com este resultado alguns pesquisadores acreditavam que todo grafo 3-regular pertencia à *Classe 1*. Dois grupos de grafos quebram esta crença. Os três grafos mais simples de um destes grupos são mostrados na Figura 2.4; os grafos em si não são mapas pois contêm pontes, por isso não se tornam contra-exemplo para o Teorema 1.

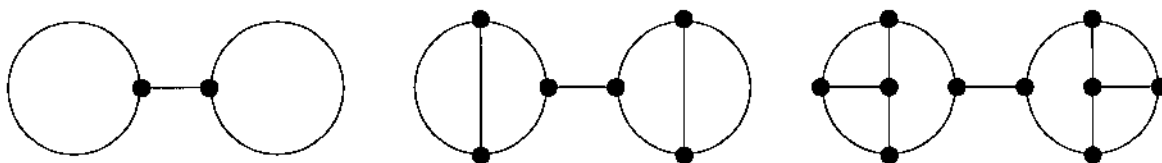


Figura 2.4: Mapas ligados por pontes.

Observe que os dois primeiros grafos da Figura 2.4 não são simples.

A outra classe é conhecida por *snarks*, que terão algumas de suas características apresentadas na próxima seção.

Com o problema das quatro cores solucionado o Teorema 1 leva ao seguinte corolário.

Corolário 1 *Todo mapa pertence à Classe 1.*

2.1 Snarks

Em decorrência ao Teorema de *P. G. Tait* (Teorema 1), a tentativa de encontrar um contra-exemplo para a conjectura da quatro cores (provada somente em 1976) levou os pesquisadores a procurar por mapas cujas arestas não poderiam ser coloridas apenas com 3 cores.

A procura por estes grafos obviamente não obteve sucesso, mas fez com que os pesquisadores acabassem se deparando com os grafos chamados de *snarks*.

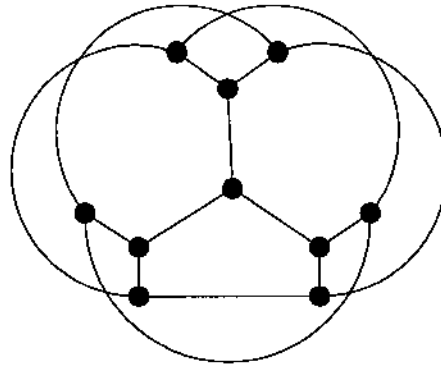


Figura 2.5: Grafo de *Petersen* - o primeiro snark.

Chamamos de **snark** a todo grafo 3-regular sem aresta de corte e índice cromático igual a 4. É claro que nenhum *snark* é planar, senão seria um contra-exemplo procurado.

O primeiro e menor *snark* foi encontrado em 1891, é o conhecido grafo de *Petersen* (Figura 2.5). O segundo *snark* somente foi encontrado mais de meio século depois, em 1946, por *D. Blanusa*. Este *snark* tem 18 vértices.

Em 1948, *B. Descartes* encontrou o terceiro *snark*, este, com 210 vértices. *G. Szekers* encontrou o quarto *snark* com 50 vértices em 1973.

A procura de *snarks* sofreu grande mudança em 1975, quando *R. Isaacs* descreveu duas famílias infinitas de *snarks*. Uma destas famílias inclui, essencialmente, todos os *snarks* encontrados até então.

Uma destas famílias é a dos *snarks* flores. O primeiro snark desta família é obtido pela substituição do vértice central do grafo de *Petersen* por um triângulo. Os demais grafos desta família são obtidos substituindo as três pétalas por 5, 7, 9 e assim por diante (sempre aumentando duas pétalas). A Figura 2.6 apresenta o primeiro e o segundo *snark* desta família.

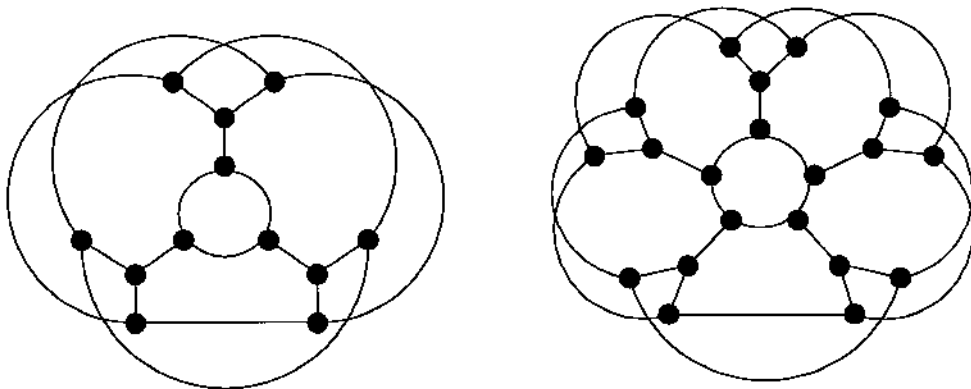


Figura 2.6: Os dois primeiros *snarks* flores.

A outra família é aquela cujos grafos são formados pela composição de outros *snarks*. Se G e H são *snarks*, então geram um terceiro *snark* denotado por $G \cdot H$, da seguinte forma

- i. Tome G e remova qualquer duas arestas não adjacentes;
- ii. Tome H e remova qualquer dois vértices adjacentes;
- iii. Ligue os vértices correspondentes conforme a Figura 2.7.

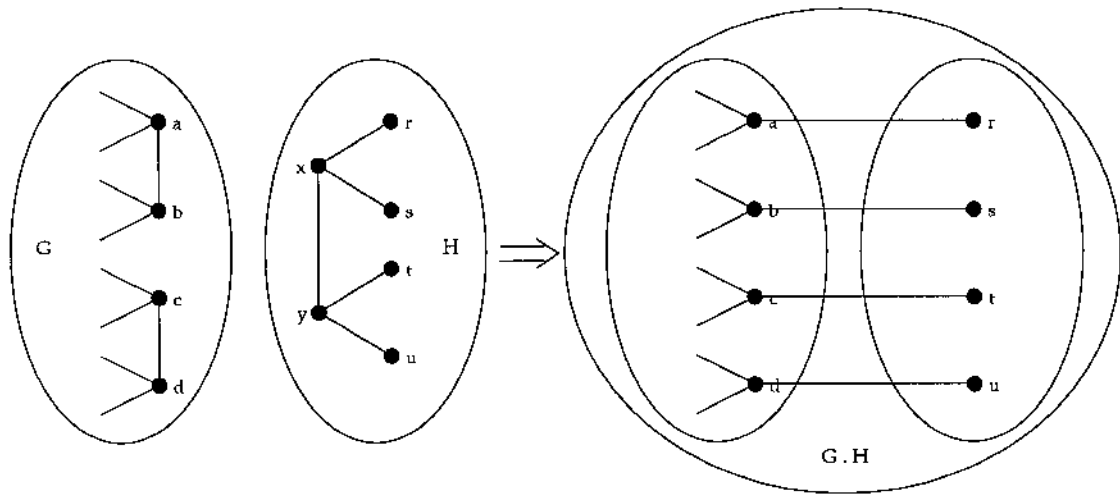


Figura 2.7: Construção de $G \cdot H$.

Assim sendo, o *snark* $G \cdot H$ tem $|V(G)| + |V(H)| - 2$ vértices.

A Figura 2.8 mostra um exemplo desta construção. Se G é o grafo de *Petersen*, então o grafo mostrado é, na verdade, $G \cdot G$. O *snark* descrito nesta mesma figura (Figura 2.8)

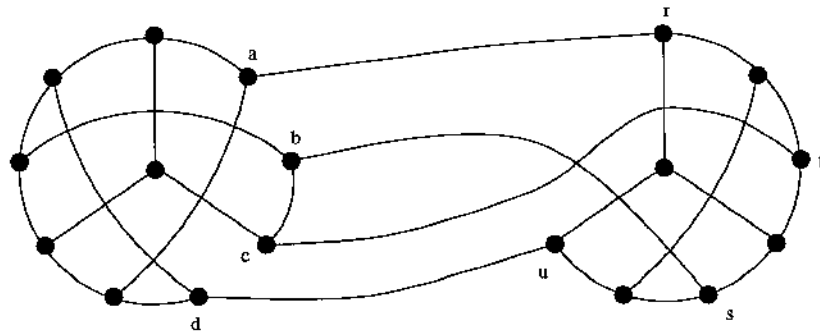


Figura 2.8: Composição do *snark* $G \cdot G$.

é o *snark* de *Blanusa*. Da mesma forma, o *snark* encontrado por G . *Szekeres* pode ser obtido através de $G \cdot (G \cdot (G \cdot (G \cdot (G \cdot G))))$.

Depois deste resultado, outros pesquisadores também conseguiram definir famílias infinitas de *snarks*. Podemos citar *F. Loupekhine* e *M. Goldberg*. A Figura 2.9 mostra o menor *snark* da família definida por este último pesquisador.

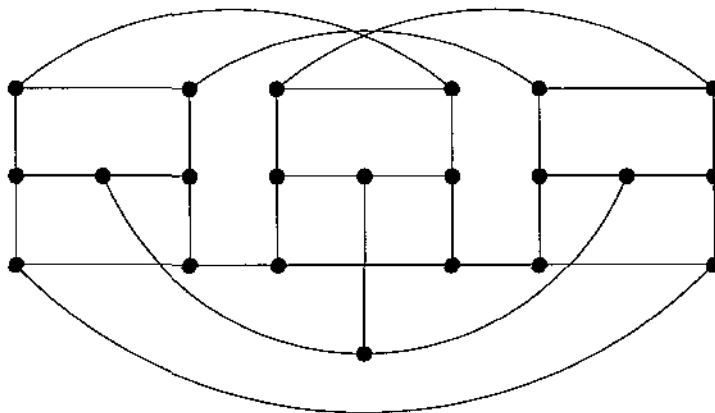


Figura 2.9: Primeiro *snark* da família de *M. Goldberg*.

2.2 Snarks e outras conjecturas

Esta seção tem por objetivo apresentar alguns *snarks*, algumas conjecturas ainda existentes e alguns *snarks* construídos de forma a quebrar algumas conjecturas.

Uma das conjecturas acerca dos *snarks* foi em relação ao tamanho dos ciclos existente em qualquer *snark*. *Jaeger* e *Swart* conjecturavam que *qualquer snark* não possuía cintura (Definição 23) maior que seis.

Procurando uma resposta para esta pergunta, *M. Kochol* ([17]) conseguiu mostrar como se construir um *snark* de cintura no mínimo $(\frac{4}{3} \pm o(1)) \log n$. Naquele texto, o pesquisador usa duas estruturas chamadas de polos para unir *snarks* já existentes e gerar outros que tenham uma cintura maior que cinco.

Outro resultado foi acerca do grau de um *snark*. Sabemos que um *snark* é um grafo regular de grau 3 e índice cromático igual a 4. Procurava-se por grafos regulares de grau k e índice cromático $k + 1$.

Em [4] encontramos os grafos conhecidos por *k-snarks*. Um *k-snark* ou **supersnark** é um grafo k regular de ordem par com índice cromático $k + 1$.

Uma família de *k-snarks* é aquela gerada pelos grafos linha (Definição 25) dos *snarks* flores. Ou seja, se G é um *snark* flor, então $L(G)$ é um *k-snark*. A Figura 2.10 mostra o 4-*snark* gerado por $L(G)$ com G igual ao primeiro *snark* flor.

Outra família de *supersnarks* é a definida *G. H. J. Meredith*. Cada *k-snark* G_k desta família tem ordem $20k - 10$.

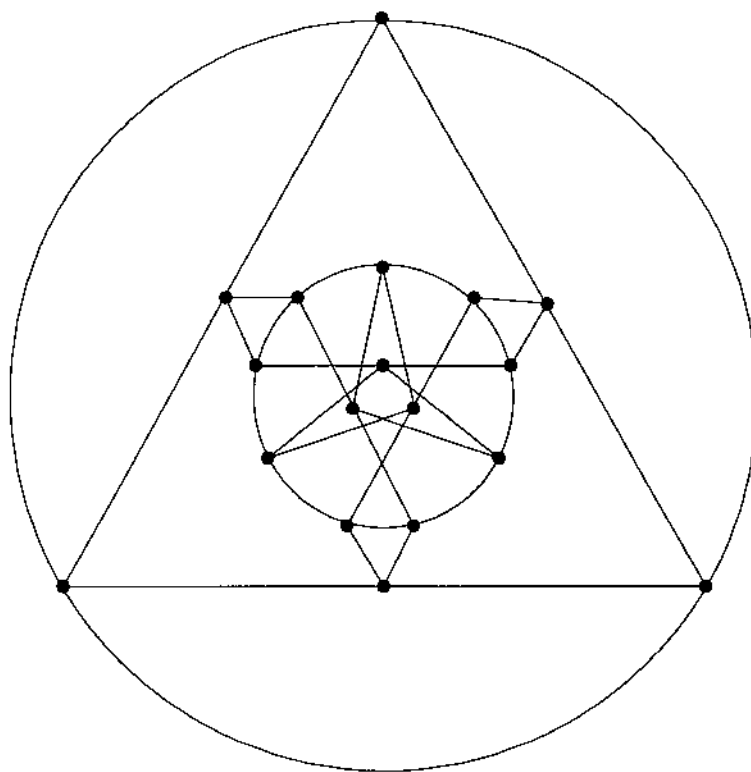


Figura 2.10: Exemplo de um supersnark.

Dizemos que G é um grafo **aresta-crítico** se a remoção de qualquer aresta de G reduz seu índice cromático. Até 1979 acreditava-se que todo grafo aresta-crítico tinha apenas número ímpar de vértices. Nesta data, *M. Goldberg* modificou sua família de *snarks* para gerar uma família infinita de contra-exemplos para esta conjectura. A Figura 2.11 é um destes contra-exemplos. Na verdade, o grafo apresentado é aquele primeiro *snark* da família de *Goldberg* exibido na Figura 2.9 com a remoção de duas arestas. Além destes contra-exemplos, vários outros foram obtidos através da remoção de arestas de alguns supersnarks. Podemos, com isso, dizer que a procura de *snarks* ajudou a verificar que a conjectura dos grafos críticos era falsa.

Uma das conjecturas a respeito de *snarks* e *supersnarks* que ainda sobrevive é a conjectura de *Tutte*.

Conjectura 1 (Tutte) *Todo snark ou supersnark contem:*

- i. Um subgrafo homeomorfo ao grafo de Petersen;
- ii. Um subgrafo contraível ao grafo de Petersen.

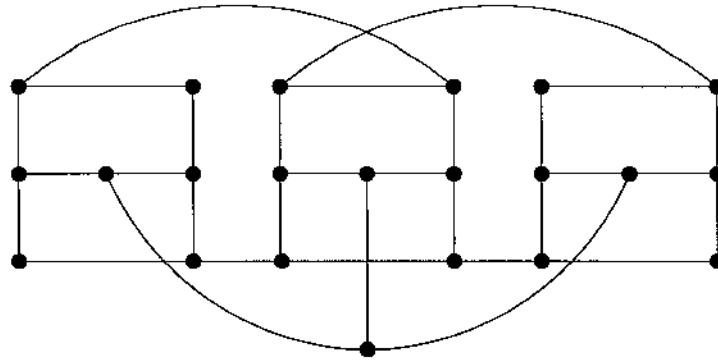


Figura 2.11: Contra-exemplo para a conjectura dos grafos críticos.

2.3 Resumo

Este capítulo apresentou alguns resultados históricos a respeito de coloração de grafos.

Vimos a importância da Conjectura das quatro cores e a equivalência com a coloração de arestas de um grafo planar 3-regular sem aresta de corte, um mapa.

A procura de grafos que não satisfizessem a Conjectura das quatro cores fez com que os pesquisadores encontrassem os grafos aqui descritos e denominados por *snarks*.

Este capítulo exibiu resultados, famílias de *snarks* e conjecturas acerca destes grafos.

Capítulo 3

Grafos Overfull

Como dito no Capítulo 1, decidir o número mínimo de cores necessário para colorir as arestas de um grafo G , $\chi'(G)$, é um problema difícil. V. G. Vizing mostrou que este índice cromático ($\chi'(G)$) é sempre um dentre dois valores: $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$.

Teorema 2 (Vizing) *Seja G um grafo simples, então $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Assim sendo, chamaremos o problema de encontrar qual o valor $\chi'(G)$ de o *Problema da Classificação*, onde dizemos que $G \in \text{Classe 1}$ se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou que $G \in \text{Classe 2}$ se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Para verificar se um grafo G pertence à *Classe 1* podemos mostrar algum argumento ou simplesmente exibir uma coloração com $\Delta(G)$ cores para as arestas de G .

Mostrar uma coloração com $\Delta(G) + 1$ cores para G não é suficiente para mostrar que $G \in \text{Classe 2}$, uma vez que os grafos que pertencem à *Classe 1* também são $(\Delta + 1)$ -coloríveis. Por isso, para verificar se G pertence à *Classe 2*, devemos exibir um outro argumento. Um dos caminhos é verificar se G é *overfull*.

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas características de grafos que são *overfull*. Alguns lemas e teoremas a serem usados em outros capítulos serão aqui apresentados.

3.1 Condições suficientes para um grafo ser Overfull

Dizemos que um grafo G é *overfull* se ele é sobrecarregado em número de arestas no sentido de ser impossível colorir G com apenas $\Delta(G)$ cores.

Dado G com suas arestas coloridas de forma válida, a cardinalidade de um conjunto de arestas de uma mesma cor não pode ultrapassar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, uma vez que é um emparelhamento (Definição 24). Então, se G tem até $\Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arestas, talvez G possa ser colorido com $\Delta(G)$ cores, mas, se

$$m > \Delta(G) * \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

então G é dito *overfull* e com certeza G pertencerá à *Classe 2*. Observe que um grafo com n par nunca satisfaz a desigualdade acima. Logo, um grafo *overfull* tem número ímpar de vértices.

Os grafos C_5 e K_5 da Figura 3.1 são *overfull*. Um exemplo bem simples de um grafo *overfull* é o C_3 (ciclo com três vértices), este grafo tem 3 arestas e $\Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2$.

Note que se G possuir um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, também teremos uma condição suficiente para G pertencer a *Classe 2*, pois se H não pode ser colorido com apenas $\Delta(G)$ cores, G também não poderá. Quando existe este subgrafo *overfull* H em G , dizemos que G é **subgrafo overfull** (*SO*). Se, ainda, H for um subgrafo gerado pela vizinhança de um vértice, dizemos que G é **vizinhança-overfull** (*NO*).

Além disso, se G é *NO*, então G é *SO*. Ainda, se G é *O*, obviamente, G também será *SO*. A Figura 3.1 mostra a relação de inclusão entre *O*, *SO*, *NO* e *Classe 2*. Os grafos desta figura mostram que algumas relações de inclusão são próprias.

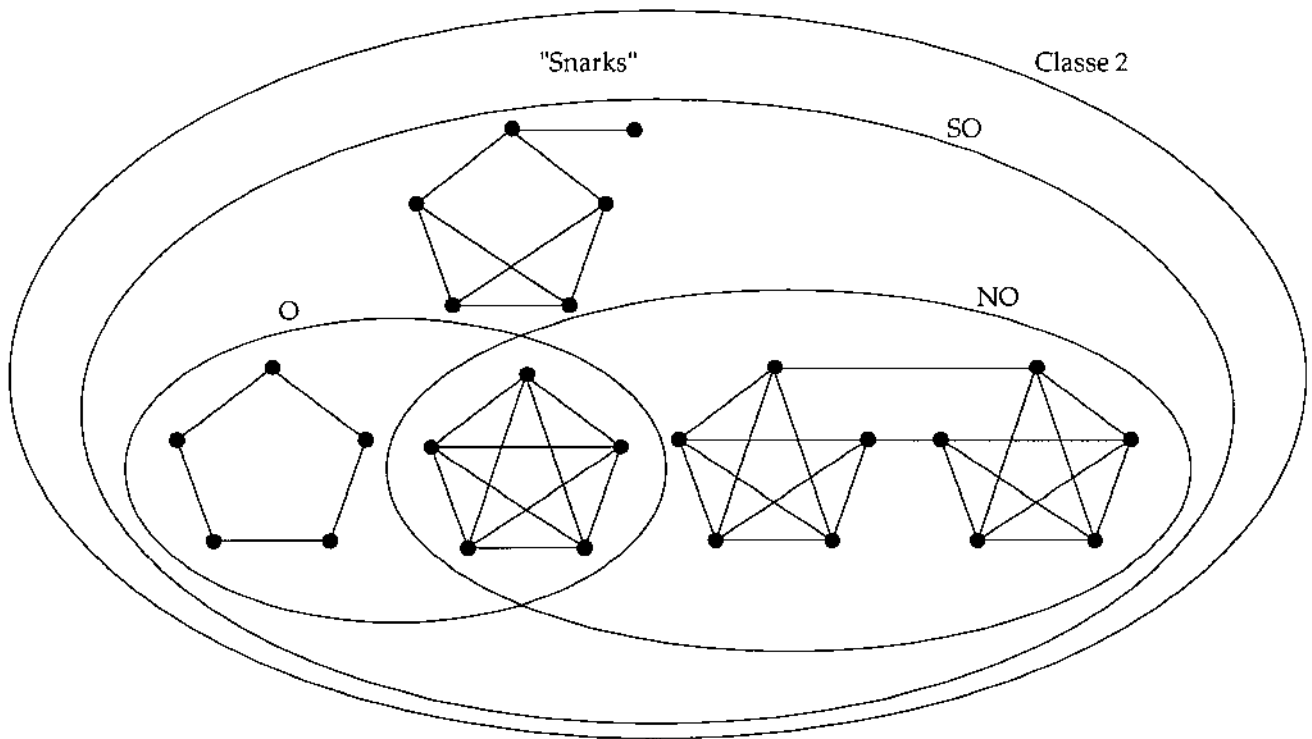


Figura 3.1: Diagrama de inclusões entre *O*, *SO*, *NO* e *Classe 2*.

É válido observar que nem todo grafo que pertence à *Classe 2* é *overfull*. A Figura 3.2 exibe um exemplo. Na Seção 2.1 do Capítulo 2 vimos vários outros exemplos.

Das definições anteriores, uma simples contagem resolve o Problema da Classificação para algumas classes.

Teorema 3 *Seja G um grafo regular com n ímpar, então G é overfull.*

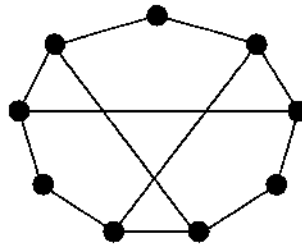


Figura 3.2: Grafo de *Petersen* sem um de seus vértices.

Prova: Se G é regular, então $m = \frac{\Delta(G)}{2}n$ que é maior que $\Delta(G)\frac{n-1}{2}$. □

Ou seja, para os grafos regulares de ordem ímpar, o Problema da Classificação está resolvido.

Corolário 2 *Se G é um grafo regular com n ímpar, então $G \in \text{Classe 2}$.*

Como exemplos podemos citar os grafos completos de ordem ímpar e os ciclos de ordem ímpar.

No Capítulo 4 (Seção 4.6.1) definiremos uma família de cografos de ordem ímpar e *overfull*.

Sabemos que grafos de ordem par não são *overfull*. Alguns destes grafos pertencem à *Classe 1*, outros pertencem à *Classe 2*. Na *Classe 1* podemos citar os ciclos pares, os grafos completos de ordem par, os grafos planares 3-regulares sem aresta de corte (*Tait*, Capítulo 2). E, na *Classe 2*, citamos os snarks (Seção 2.1).

A equivalência entre *NO* e *SO* é válida nos grafos split, nos grafos indiferença ([10]) e *O* e *SO* são equivalentes nos multipartidos completos ([14]), uma subclasse dos cografos. No Capítulo 5 mostramos que a equivalência *O* e *SO* não se estende aos cografos.

De forma mais específica, para a subclasse dos cografos que possuem *cotree* completa de nível 3, mostramos que se G nesta subclasse possui um subgrafo próprio H *overfull* com $\Delta(G) = \Delta(H)$, então G é *NO*.

3.2 Algoritmos de Verificação

Uma preocupação surgida foi a de encontrar um algoritmo mais rápido que o trivial para verificar se um grafo G possui um subgrafo que é *overfull*. O algoritmo trivial leva um tempo exponencial.

Esta seção apresenta dois caminhos para se chegar a um algoritmo polinomial que verifica a existência ou não de subgrafo *overfull* em um grafo G .

Dado um grafo G , construa \hat{G} da seguinte forma:

- i. Faça $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{x\}$;
- ii. Para cada $v \in V(G)$, adicione $\Delta(G) - gr_G(v)$ arestas ligando v a x ;
- iii. Se n é ímpar, chame $V(\hat{G})$ de vértices pretos;
se n é par, chame $V(G)$ de vértices pretos e x de vértice branco.

O passo **iii.** é feito para que se tenha um número par de vértices pretos. A Figura 3.3 exhibe esta construção de \hat{G} .

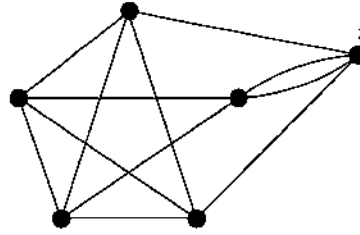


Figura 3.3: Construção de \hat{G} .

Teorema 4 *Seja G um grafo simples e $S \subseteq V(G)$ tal que $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$. Então $G[S]$ é overfull se e somente se S possui um número ímpar de vértices pretos e $||S, \bar{S}|| \leq \Delta(G) - 2$ em \hat{G} .*

Prova: (\Rightarrow) Se $G[S]$ é overfull, então $|A(G[S])| > \Delta(G) \lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor$. Obviamente $|S|$ é ímpar e seus vértices são pretos, pois o único possivelmente branco não pertence a $V(G)$.

Uma vez que todos os vértices de G em \hat{G} tem grau $\Delta(G)$, podemos escrever que a soma dos graus dos vértices em S é

$$\Delta(G)|S| = 2|A(G[S])| + ||S, \bar{S}||.$$

Por outro lado, como $G[S]$ é overfull, temos que $2|A(G[S])| > \Delta(G)(|S| - 1)$. Mas, por uma questão de paridade ($2|A(G[S])|$ e $\Delta(G)(|S| - 1)$ são dois termos pares) ainda teremos

$$2|A(G[S])| \geq \Delta(G)(|S| - 1) + 2.$$

Juntando estas desigualdades chegamos a $||S, \bar{S}|| \leq \Delta(G) - 2$.

(\Leftarrow) Se S possui um número ímpar de vértices pretos, então S possui um número ímpar de vértices de G .

Novamente temos que

$$2|A(G[S])| = \Delta(G)|S| - ||S, \bar{S}||.$$

Como, por hipótese $||[S, \bar{S}]| \geq \Delta(G) - 2$,

$$2|A(G[S])| \geq \Delta(G)|S| - \Delta(G) + 2 = \Delta(G)(|S| - 1) + 2.$$

Uma vez que $\Delta(G) = \Delta(G[S])$, temos que

$$2|A(G[S])| \geq \Delta(G[S])(|S| - 1) + 2,$$

ou seja, $G[S]$ é *overfull*. □

Como *Padberg* e *Rao* deram um algoritmo polinomial capaz de encontrar um corte mínimo entre os cortes que separam um número ímpar de vértices pretos em cada margem num grafo com um número total par de vértices pretos, temos o seguinte algoritmo polinomial para encontrar um possível subgrafo *overfull*.

Algoritmo SO

Entrada: Grafo G .

Saída: Subgrafo *overfull* de G , se existir.

Construir \hat{G} ;

Achar S tal que $|S| > 1$ seja ímpar e $||[S, \bar{S}]|$ seja mínimo;

Retornar $G[S]$ se $||[S, \bar{S}]| \leq \Delta(G) - 1$.

Além deste algoritmo, *T. Nielsen* ([18]) exhibe um outro algoritmo polinomial baseado, principalmente, no número de Δ -vértices especiais (Definição 12) adjacentes a um vértice que pertence a um subgrafo H de G .

Provando que todo vértice em um subgrafo *overfull* de G é adjacente a pelo menos dois Δ -vértices especiais, o primeiro passo do algoritmo desenvolvido por *T. Nielsen* é excluir os vértices de G que são adjacente a no máximo um Δ -vértice especial.

Além disso, o pesquisador mostra que podemos fazer uma relação do grau dos vértices que pertencem a esse possível subgrafo H com o grau dos vértices que não pertencem. Sabe-se que se $v \in V(H)$ e $w \notin V(H)$, então $gr_G(v) \geq gr_G(w) + 2$. Assim sendo, a segunda etapa do algoritmo será eliminar os vértices que possuem o grau pequeno em relação aos de grau maior.

Os lemas, corolários e teorema que seguem são exibidos para se chegar aos resultados usados por *T. Nielsen*.

Lema 1 *Um grafo G é overfull se e somente se $|V(G)|$ é ímpar e*

$$\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - gr_G(v)) \leq \Delta(G) - 2.$$

Prova: Seja $|A(G)| = m$. Por definição, G é *overfull* se e somente se $|V(G)| = n$ é ímpar e

$$\begin{aligned}
 m &> \Delta(G) \frac{(n-1)}{2} \\
 m &\geq \Delta(G) \frac{(n-1)}{2} + 1 \\
 2m &\geq \Delta(G)(n-1) + 2 \\
 -2m &\leq -\Delta(G)n + \Delta(G) - 2 \\
 \Delta(G)n - 2m &\leq \Delta(G) - 2 \\
 \sum_{v \in V(G)} \Delta(G) - \sum_{v \in V(G)} gr_G(v) &\leq \Delta(G) - 2 \\
 \sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - gr_G(v)) &\leq \Delta(G) - 2
 \end{aligned}$$

□

Corolário 3 Se G é *O* e $v \in V(G)$, então $gr_G^*(v) \geq 2$.

Prova: Pelo Lema 1 temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{w \in N_G(v) \cup \{v\}} (\Delta(G) - gr_G(v)) &\leq \Delta(G) - 2 \\
 \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_G(v)) + \Delta(G) - gr_G(v) &\leq \Delta(G) - 2 \\
 \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_G(v)) + 2 &\leq gr_G(v)
 \end{aligned}$$

Uma vez que $\sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_G(v)) \geq gr_G(v) - gr_G^*(v)$, temos que $gr_G(v) \geq gr_G(v) - gr_G^*(v) + 2$. Assim sendo, $gr_G^*(v) \geq 2$. □

Com isto, *T. Niessen* mostra que

Lema 2 Seja G um grafo com um subgrafo *overfull* H tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, então todo Δ -vértice de H é Δ -vértice especial de G .

Prova: Se v é Δ -vértice em H , então v é Δ -vértice em G , ou seja, $N_H(v) = N_G(v)$.

Assim,

$$\sum_{w \in N_G(v)} gr_G(w) \geq \sum_{w \in N_H(v)} gr_H(w)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - \Delta(G) - gr_H(w)) \\
&= \sum_{w \in N_G(v)} \Delta(G) - \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_H(w)) \\
\sum_{w \in N_G(v)} gr_G(w) &\geq \Delta(G)^2 - \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_H(w)) \\
\sum_{w \in N_G(v)} gr_G(w) &\geq \Delta(G)^2 - \Delta(G) + 2.
\end{aligned}$$

□

Podemos analisar os resultados do Corolário 3 e do Lema 2 e obter

Corolário 4 *Seja G um grafo com um subgrafo $overfull$ H tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, então todo vértice em $V(H)$ é adjacente a pelo menos dois Δ -vértice especiais de G .*

Assim sendo, se estamos procurando algum subgrafo $overfull$ em G , em primeira instância, podemos retirar deste possível subgrafo aqueles vértices que são adjacentes a no máximo um Δ -vértice especial de G .

Outro resultado descrito por *T. Niessen* em [18] observa o grau dos vértices que pertencem a um possível subgrafo $overfull$ H de G com $\Delta(G) = \Delta(H)$.

Teorema 5 *Seja G um grafo e H um subgrafo $overfull$ de G com $V(H) \neq V(G)$ e $\Delta(H) = \Delta(G)$. Se todo vértice de $G \setminus H$ é adjacente a no mínimo dois vértices de $V(H)$, então*

$$\min_{v \in V(H)} gr_G(v) \geq \max_{w \in V(G \setminus H)} gr_G(w) + 2.$$

Prova: Se H é subgrafo $overfull$ de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$, então

$$\begin{aligned}
|A(H)| &\geq \Delta(G) * \frac{(|V(H)| - 1)}{2} + 1 \\
|A(H)| &\geq \frac{\Delta(G) * (|V(H)| - 1) + 2}{2} \\
2 * |A(H)| &\geq \Delta(G) * (|V(H)| - 1) + 2 \\
-2 &\geq \Delta(G) * (|V(H)| - 1) - 2 * |A(H)| \quad (+gr_G(v)) \\
gr_G(v) - 2 &\geq gr_G(v) + \Delta(G) * (|V(H)| - 1) - 2 * |A(H)| \\
gr_G(v) - 2 &\geq \sum_{x \in V(H)} (gr_G(x) - gr_H(x)) \\
gr_G(v) - 2 &\geq m_G(V(H)) \\
gr_G(v) - 2 &\geq \sum_{x \in V(G \setminus H)} m_G(x, V(H)) \\
gr_G(v) - 2 &\geq m_G(w, V(H)) + 2 * (|V(G \setminus H)| - 1) \\
gr_G(v) - 2 &\geq gr_G(w).
\end{aligned}$$

□

Esta verificação do grau dos vértices de G ajuda a verificar quais vértices não pertenceriam a um possível subgrafo *overfull* H .

Com estes resultados, *T. Nielsen* exhibe o algoritmo para encontrar um subgrafo *overfull* H em G tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$. O Teorema 6 abaixo diz que o algoritmo a ser descrito vale somente para aqueles grafo com $\Delta \geq \frac{n}{2}$.

Teorema 6 *Seja G um grafo com um subgrafo *overfull* H e $\Delta(G) = \Delta(H)$, se $\Delta(G) \geq \frac{n}{2}$ e todo vértice de G é adjacente a no mínimo dois vértices maiores, então para todo vértice maior $v \in V(G \setminus H)$, existe um vértice $w \in N_G(v)$, tal que w é adjacente a no máximo um vértice maior próprio.*

Veja o algoritmo descrito por *T. Nielsen*.

- Verifica quais vértices de G não são adjacentes a dois Δ -vértices especiais, pois pelo Corolário 3 estes vértices podem ser excluídos da procura;
- Depois de feita a exclusão, os n' vértices restantes são ordenados crescentemente pelo grau;
- Pelo Teorema 5, procura-se o primeiro vértice v_i , na ordenação, tal que $gr_G(v_i) \geq gr_G(v_{i+1}) + 2$, para $1 < i < n'$;
- Verifica se i é ímpar e se $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ é *overfull*.

Outra preocupação envolvendo um grafo G que é *SO*, é acerca do número de subgrafos *overfull* com grau máximo igual a $\Delta(G)$ que G pode conter. Sabe-se que se este grafo tem grau máximo igual ou superior a $\frac{n}{2}$, não conterá mais de um subgrafo *overfull*. A Figura 3.4 exhibe um grafo com dois subgrafos *overfull* com grau $\Delta(G)$, mas, $\Delta(G) < \frac{n}{2}$.

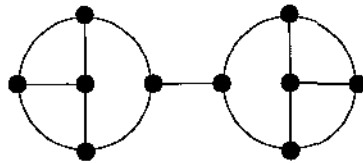


Figura 3.4: Exemplo de grafo com dois subgrafos *overfull*.

O Teorema 7 possui um papel especial pois é usado em nosso resultado a ser visto no Capítulo 5.

Teorema 7 ([18]) *Seja G um grafo com $\Delta(G) \geq |V(G)|/2$. Se G possui um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, então H é único.*

Prova: Suponha que G e H são *overfull*. Seja $V(G) = n = 2q + 1$ e $V(H) = 2p + 1$. Portanto, $q \geq p + 1$.

Além disso,

$$\Delta(G)n \leq 2m = \sum_{v \in V(G)} gr_G(v).$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} gr_G(v) &= \sum_{v \in V(H)} gr_G(v) + \sum_{v \in V(G) \setminus V(H)} gr_G(v) \\ &\leq (2p + 1)\Delta(G) + |[V(H), \overline{V(H)}]| + (2q - 2p)(2q - 2p - 1) \\ &\leq (2p + 1)\Delta(G) + \Delta(G) - 2 + 2(q - p)(2q - 2p - 1) \end{aligned}$$

Temos que

$$\Delta(G)n \leq (2p + 1)\Delta(G) + \Delta(G) - 2 + 2(q - p)(2q - 2p - 1),$$

que resulta

$$(q - p - 1)\Delta(G) \leq (q - p)(2q - 2p - 1) - 2 < (q - p - 1)(2q - 2p + 1).$$

A desigualdade não seria satisfeita para $q = p + 1$, portanto temos que $q > p + 1$ e $\Delta(G) < 2q - 2p + 1$. Combinando com a hipótese de $\Delta(G) > p + 1$, teremos $2p < n$. Com isso, teríamos

$$2p = V(H) - 1 \geq \Delta(G) \geq q + 1,$$

chegando a uma contradição. □

3.3 A Conjectura de Hilton e Chetwynd

Nesta seção comentaremos a respeito da equivalência entre *SO* e *Classe 2*. Uma importante conjectura (Conjectura 2) diz que *SO* e *Classe 2* são equivalentes quando o grafo possui Δ superior a $\frac{n}{3}$. Esta é a conhecida Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd* que foi anunciada por *Hilton* e *Chetwynd* em 1985 em um congresso na Dinamarca e publicada pela primeira vez em 1989 ([5]).

Conjectura 2 (Hilton e Chetwynd) *Um grafo G com $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$ pertence à Classe 2 se e somente se G é *SO*.*

O grafo mostrado na Figura 3.2 é o menor exemplo de grafo que pertence à *Classe 2* e não é *SO*. Este grafo não pertence ao conjunto de vértices que satisfaz a Conjectura 2,

pois seu Δ é igual a $\frac{n}{3}$. Isto também mostra que a restrição da Conjectura de *Hilton e Chetwynd* é a melhor possível.

Vários são os pesquisadores interessados em trabalhar com esta conjectura. Devido a este esforço, muitos foram os resultados obtidos. Podemos citar o resultado mostrado por *M. Plantholt* que provou ser verdadeira esta conjectura para grafos que possuem $\Delta(G) = n - 1$ ([20]). Os próprios autores da conjectura, *A. G. Chetwynd* e *A. J. W. Hilton*, melhoraram este resultado, provando que a conjectura é verdadeira para grafos com $\Delta(G) \geq n - 3$ ([5]). Além destes resultados, *T. R. Jensen* e *B. Toft* ([16]) citam que *A. G. Chetwynd* e *A. J. W. Hilton* provaram a conjectura quando $\Delta(G) \geq (\sqrt{21} - 1)\frac{n+1}{4} + 1$ e $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Além destes, *D. G. Hoffman* e *C. A. Rodger* ([14]), demonstraram que os multipartidos completos também satisfazem a conjectura (Teorema 8 da Seção 3.4).

Na Seção 4.6 (Capítulo 4) mostramos que os cografos formam uma classe que satisfaz a hipótese da Conjectura de *Hilton e Chetwynd*. Para finalizar e confirmar, os algoritmos apresentados no Capítulo 6 provam que a Conjectura 2 é verdadeira para uma subclasse dos cografos, aquela composta por cografos que possuem *cotree* completa no nível 3 (ver Seção 4.1 do Capítulo 4).

3.4 Grafos Multipartidos Completos

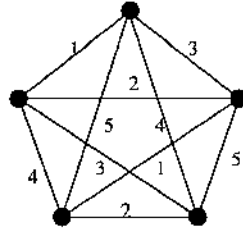
Nesta seção, mostraremos a idéia da coloração de arestas dadas pelos pesquisadores *D. G. Hoffman* e *C. A. Rodger* ([14]) aos grafos multipartidos completos (Definição 14) que não são *O*. Com esta coloração, os pesquisadores citados mostram que a Conjectura 2 (de *Hilton* e de *Chetwynd*) também é válida para os grafos multipartidos completos, pois um grafo nesta família pertence à *Classe 2* se e somente se é *O*. Mais precisamente, os pesquisadores provam que não ser *overfull* é uma condição suficiente para um grafo desta família pertencer à *Classe 1*. Para isso, os pesquisadores exibem uma coloração com Δ cores para as arestas dos grafos multipartidos completos que não são *overfull*.

Teorema 8 *Seja M um grafo multipartido completo, então $M \in \text{Classe 2}$ se e somente se é *overfull*.*

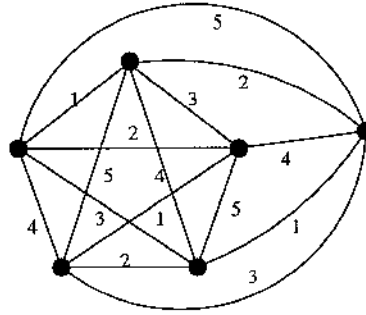
Na demonstração do Teorema 8 os pesquisadores usam uma técnica baseada no grafo das cores livres.

3.4.1 Grafo das cores livres

A técnica do grafo das cores livres leva em consideração a coloração de arestas de um grafo sem alguns de seus vértices.

Figura 3.5: Coloração de arestas para K_5 .

No exemplo da Figura 3.5 colore-se K_5 com 5 cores, pois este grafo é O , ou seja, é *Classe 2*. Uma vez que uma cor diferente é livre em cada vértice, podemos inserir um novo vértice, originando uma coloração com 5 cores para o grafo K_6 (Figura 3.6).

Figura 3.6: Coloração de arestas para K_6 usando grafo das cores livres.

Observe que na Figura 3.5 a coloração usada é equitativa (Definição 9). Em [21], encontramos um resultado que diz que se colorimos $A(G)$ com c cores, então conseguimos alterar esta coloração de forma que fique equitativa.

Na Figura 3.6 onde colorimos as arestas dos grafos K_6 usando uma coloração de arestas para o grafo K_5 encontramos um exemplo para a técnica do grafo das cores livres, que pode ser generalizada da seguinte forma.

- i. Dado um grafo G e uma coloração C tal que $|C| \geq \Delta(G) + 1$, distribua C de forma equitativa entre as arestas em $A(G)$;
- ii. Construa um grafo bipartido D_G tal que $V(D_G) = V(G) \cup C$ formando uma partição de vértices de D_G e $(x, c) \in A(D_G)$ se e somente se $c \in C$ e $x \in V(G)$ e a cor c está livre no vértice x ;
- iii. Colora as arestas de D_G com $\Delta(D_G)$ cores; note que todo grafo bipartido pertence à *Classe 1* ([12]);
- iv. Se a aresta (x, c) em D_G tem a cor y , então, se a aresta $(x, y) \in A(G)$ pinte esta aresta com a cor c .

Observe que, para o grafo K_5 , $\Delta(D_{K_5}) = 1$, possibilitando a inclusão de um novo vértice, e, como $gr_{D_{K_5}}(v) = 1$, para todo $v \in V(K_5)$, este novo vértice será adjacente a todo $v \in V(K_5)$, originando um K_6 .

Esta técnica foi usada pelos pesquisadores de [14] para pintar as arestas dos grafos multipartidos que não são *overfull*.

3.4.2 Colorindo os multipartidos que não são O

Como dito anteriormente, para se mostrar que um determinado grafo pertence à *Classe 1*, basta exibir uma coloração com Δ cores para suas arestas.

D. G. Hoffman e *C. A. Rodger* exibem, usando a técnica do grafo das cores livres, uma coloração com Δ cores para as arestas de um grafo multipartido completo que não é *overfull*.

Considere M um grafo multipartido completo com $V(M) = V_1 \cup \dots \cup V_p$, ou seja, M possui p elementos em sua partição de vértices. Suponha, ainda, que $|V_i| = a_i$, para $1 \leq i \leq p$.

Seja $G = M[V(M) \setminus V_p]$, ou seja, $|V(G)| = a_1 + \dots + a_{p-1}$ e $\Delta(G) = \Delta(M) + a_p$. De forma bastante resumida, os pesquisadores em [14] fazem o seguinte:

- i. Constróem G' adicionando arestas a G até que se tenha $A(G') \leq \lfloor \frac{n\Delta(G)}{2} \rfloor$, fazendo de G' um grafo quase regular com $\Delta(G') = \Delta(G)$;
- ii. Pintam as arestas de G' com $\Delta(M)$ cores de forma equitativa ($\Delta(M) \geq \Delta(G') + 1$);
- iii. Constróem o bipartido $D_{G'}$ com os vértices de G' e $C_{G'} = \{c_1, \dots, c_{\Delta(M)}\}$;
- iv. Fazem com que todos os vértices de G' em $D_{G'}$ tenham grau a_p ;
- v. Colorem as arestas (x, y) com $x \in V(G')$ e $y \in V_p$ usando a técnica do grafo das cores livres.

Ilustraremos a construção acima usando o grafo multipartido completo $M = K_{3,3,2,2}$. Como M tem número par de vértices, então M não é *overfull*.

Tome $G = K_{3,3,2}$, com $a_p = 2$. Para o Passo *i*., adiciona-se arestas entre vértices que não possuem grau $\Delta(G)$. A Figura 3.7 mostra esta construção para G' . Observe que G' perde a propriedade dos grafos multipartidos completos, a de não haver arestas entre vértices de mesmo elemento de partição. Além disso, G' deixa de ser um grafo simples pois existem duas arestas ligando o mesmo par de vértices (vértices 3 e 6).

De qualquer forma, $|A(G')| = 24 = \lfloor \frac{n\Delta(G)}{2} \rfloor$.

O Passo *ii* pode ser verificado na Figura 3.8. Note que cada cor aparece nas arestas de G' exatamente 3 vezes. São usadas $\Delta(M) = 8$ cores. É interessante tornar o grafo G'

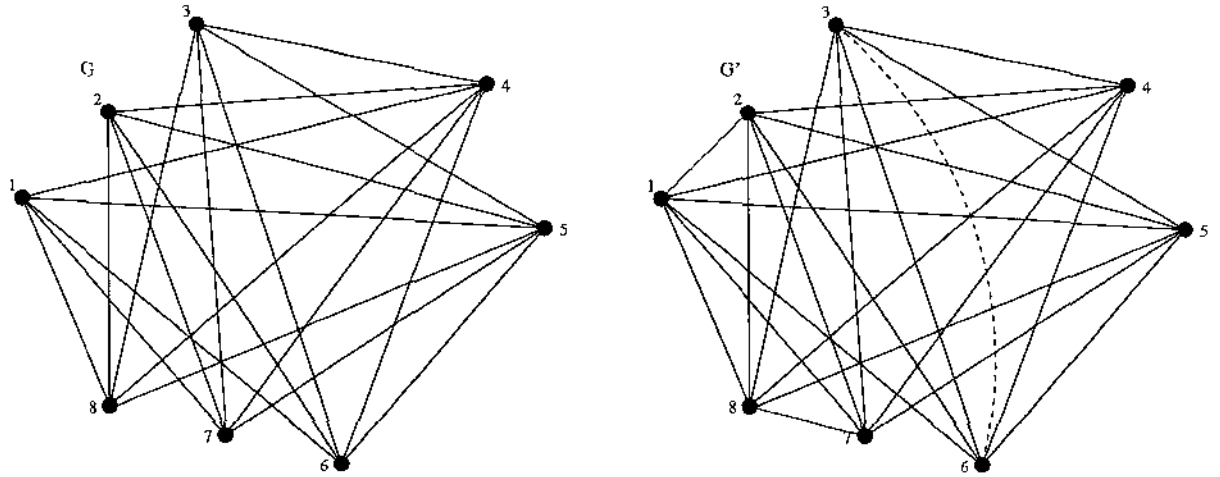


Figura 3.7: Grafo multipartido G e sua construção quase regular G' .

quase regular, mesmo contendo arestas múltiplas, para que, quando possível, os vértices de $V(G')$ em $D_{G'}$ tenham todos o mesmo grau, ou pelo menos a grande parte deles. A Figura 3.9 mostra esta afirmação; no caso, todos os vértices de $V(G')$ em $D_{G'}$ têm grau 2. Teremos os Passos *iii* e *iv*.

Uma vez as arestas do grafo bipartido $D_{G'}$ coloridas com $\Delta(D_{G'})$ cores, podemos finalizar a técnica do grafo das cores livres. No caso, $a_p = 2$ e $\Delta(D_{G'}) = 2$.

A Figura 3.10 exibe a coloração resultante do delírio para as arestas do grafo gerado por M . Como este grafo possui mais arestas que M , se o colorimos com $\Delta(M)$ cores, teremos uma coloração com $\Delta(M)$ cores para M (basta remover as arestas tracejadas que foram incluídas para se fazer uso da técnica do grafo das cores livres), ou seja, $M \in \text{Classe 1}$.

O grafo G' é construído dessa maneira quando $n \equiv a_p \pmod{2}$ ou $\Delta(M) + a_p \leq a_p(\Delta(M) + a_p - n)$. Nos demais casos, outros grafos auxiliares são construídos. Mas em todos esses casos, a técnica do grafo das cores livres é aplicada. Não trataremos destes casos neste texto, pois niosso objetivo foi de enfatizar a aplicação da técnica do grafo das cores livres.

3.5 Resumo

Este capítulo exibiu o argumento de contagem mais usado para classificar grafos em relação a sua coloração de arestas: ser ou não ser *overfull*.

Dois algoritmos polinomiais para encontrar subgrafos *overfull* com o mesmo Δ do grafo foram apresentados. Um derivado de *Padberg e Rao* e outro desenvolvido por *Niessen*.

Citamos a Conjectura de *Hilton e Chetwynd* que faz a relação dos grafos com $\Delta > \frac{n}{3}$ e grafos que são *SO*. Vimos também que vários pesquisadores provaram esta conjectura

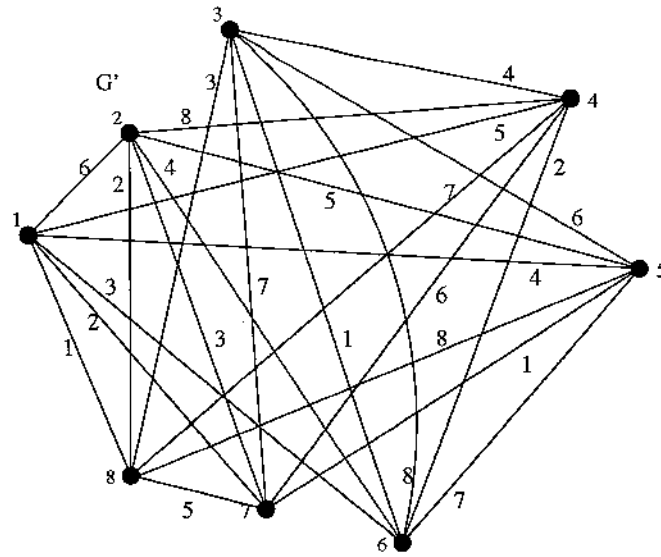


Figura 3.8: Coloração equitativa para G' usando $\Delta(M) = 8$ cores.

para diversas famílias de grafos.

Finalizamos o capítulo comentando o uso da técnica do grafo das cores livres na demonstração da classificação dos grafos multipartidos completos, que são mais uma evidência para a Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd* (Conjectura 2).

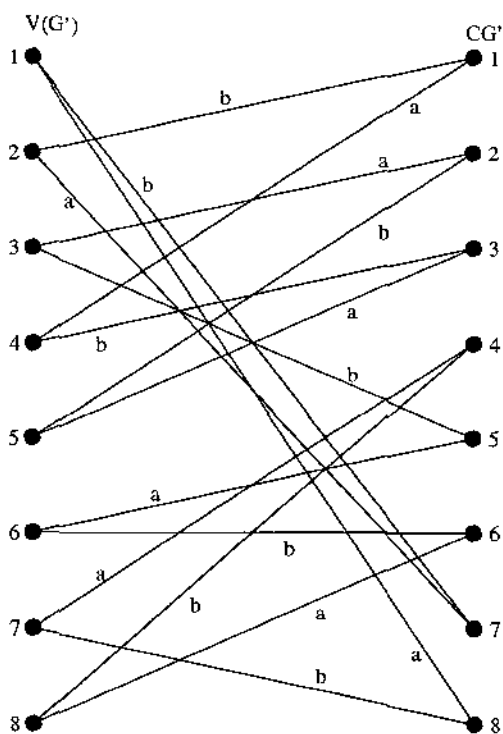


Figura 3.9: Grafo das cores livres de G' , $\Delta(D_{G'}) = 2$ cores.

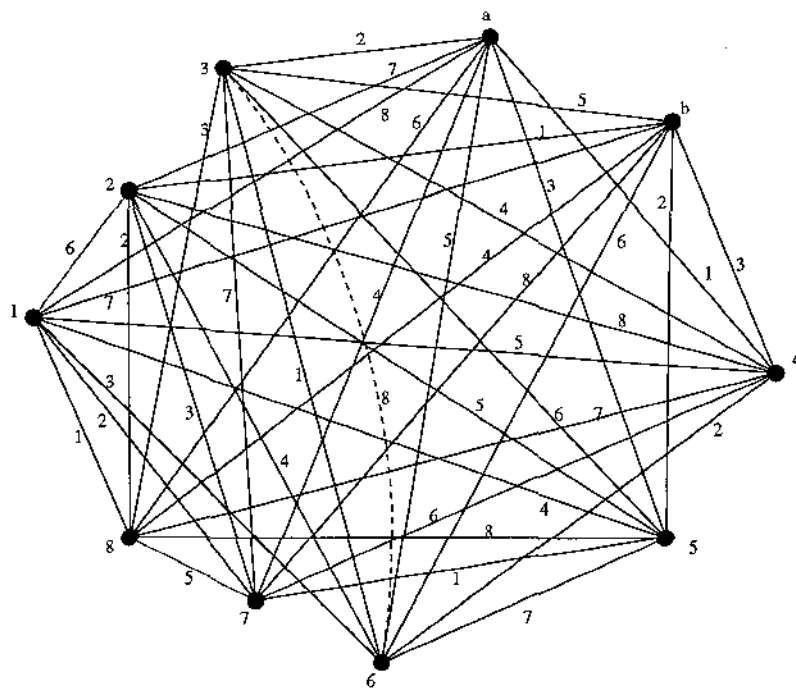


Figura 3.10: Coloração com $\Delta(M) = 8$ para M , gerada pelo grafo das cores livres.

Capítulo 4

Cografos

Grafos redutíveis por complemento, ou simplesmente **cografos**, de forma independente têm sido redescobertos por vários pesquisadores. Vários são os sinônimos para cografos: grafos D^* , grafos sem P_4 , grafos HD , entre outros.

De uma forma geral, um **cografo** G é um grafo simples definido, recursivamente, como ([6]):

- i. Se G é tal que $|V(G)| = 1$ (G é trivial), então G é um cografo;
- ii. Se G_1, \dots, G_k são cografos, então $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$ também é cografo;
- iii. Se G é cografo, então \overline{G} também é cografo.

Assim sendo, cografos são grafos que podem ser obtidos a partir de grafos de um único vértice (grafos triviais) através de um número finito de operações de união e complemento. A Figura 4.1, mostra a construção recursiva de um cografo de sete vértices.

De forma inversa, um cografo pode ser reduzido a vários vértices isolados, se forem feitas recursivas operações de complemento em todos os componentes conexos. Daí a denominação aos cografos: grafos redutíveis por complemento - *complement reducible graphs*. Também são conhecidos como **grafos sem P_4** (Definição 22), por não possuírem P_4 como subgrafo induzido (veja o Teorema 9).

Além disso, possuem uma única árvore de representação, chamada de **cotree** ([7]). Cada folha de uma *cotree* representa os vértices do cografo correspondente. Cada nodo interno representa uma operação de união seguida de complemento; estes nodos internos são rotulados com 0 ou 1 (**0-nodo** ou **1-nodo**, respectivamente), de tal forma que esses rótulos se alternem por todo caminho que começa da raiz.

Em [6] e [7] os pesquisadores consideram que a raiz sempre será 1-nodo, mesmo quando o cografo for desconexo. Neste caso, a raiz terá somente um filho 0-nodo.

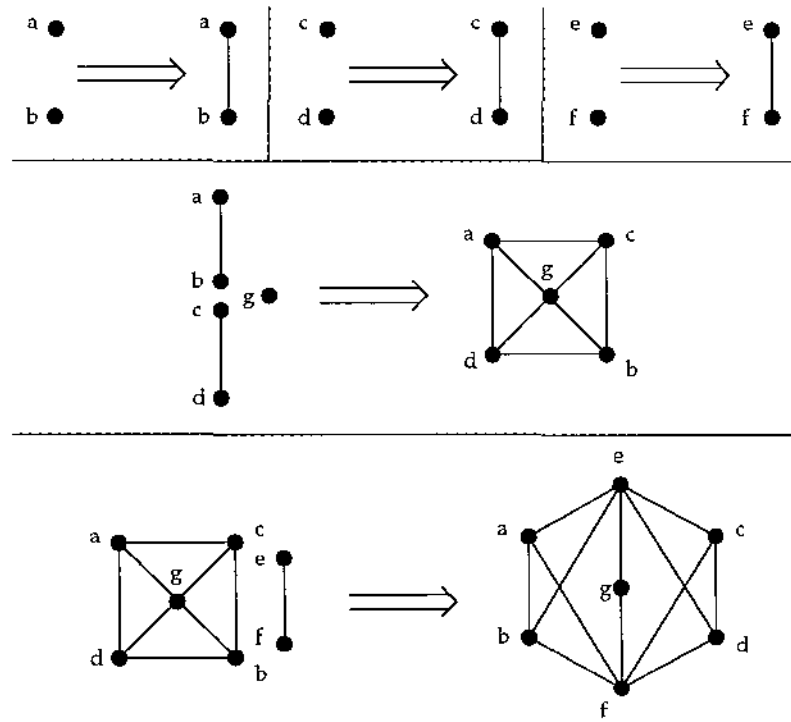


Figura 4.1: Construção de um cografo usando a definição recursiva.

Dois vértices x e y de um cografo são adjacentes se e somente se o caminho de x à raiz encontra o caminho de y à raiz em um 1-nodo. A Figura 4.2 mostra um cografo e sua respectiva *cotree*.

Esta representação em forma de árvore forma a base para muitos algoritmos polinomiais para alguns problemas clássicos, como isomorfismo, número cromático, detecção de cliques, de conjuntos independentes, entre outros. *D. G. Corneil, H. Lerchs e L. S. Burlingham* ([6]) mostram como a *cotree* de um cografo é utilizada na solução de alguns dos problemas citados (Seção 4.5). *D. G. Corneil, Y. Perl e L. K. Stewart* ([7]) usam a *cotree* definida para desenvolver um algoritmo linear de reconhecimento de cografos (Seção 4.3).

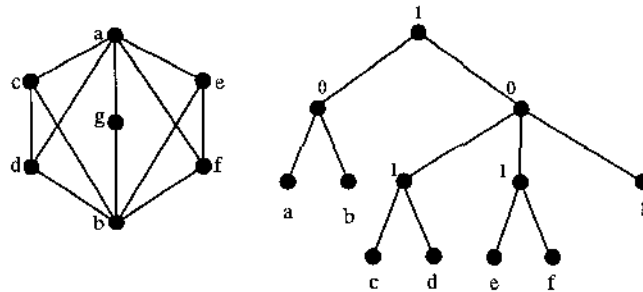


Figura 4.2: Exemplo de um cografo e sua respectiva *cotree*.

A não ser que seja especificado o contrário, os grafos considerados neste texto serão conexos (todo nodo interno, inclusive a raiz, terá pelo menos dois filhos).

Estamos interessados em estudar os cografos e a coloração de suas arestas.

A Figura 4.3 exibe a situação de famílias de grafos em relação a complexidade do Problema da Classificação. A versão inicial desta figura foi encontrada em [2]; algumas classes ou subclasses de grafos classificadas recentemente foram acrescentadas.

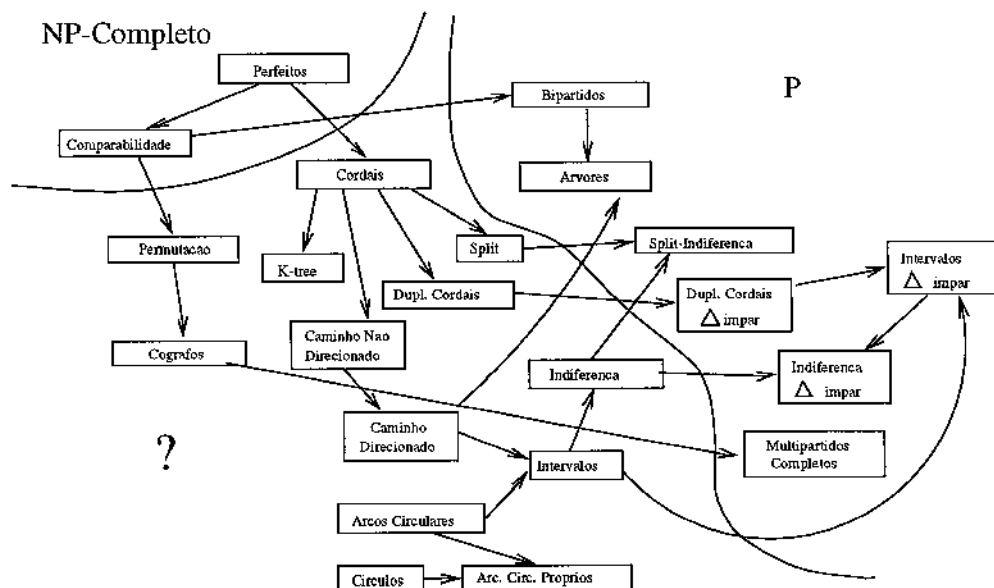


Figura 4.3: Algumas classes de grafos e a complexidade em relação ao índice cromático. $A \rightarrow B$ indica que $B \subset A$.

Observe que para uma superclasse dos cografos, os grafos de comparabilidade, foi provado que o problema da Classificação é NP-Completo ([2]) e, recentemente, os multipartidos completos, provou-se que pertence à P ([14]).

4.1 Nomenclatura

Nesta seção propomos uma nomenclatura para os cografos baseada em sua representação em *cotree*.

Denotaremos por $T(G)$ a *cotree* de um cografo G e dizemos que $T(G)$ é uma **cotree de nível k** se a altura de $T(G)$ é igual a k , e que $T(G)$ é uma **cotree completa** de nível k se todas as folhas de $T(G)$ se encontram no nível k . (Obs.: a raiz está no nível 0.)

Por exemplo, um grafo completo é um cografo de *cotree* de nível 1. Um grafo multipartido completo não trivial (pelo menos um elemento de sua partição de vértices é não trivial) é um cografo de *cotree* de nível 2 (veja Teorema 13 da Seção 4.6.1).

Vamos chamar de $\alpha(i)$ ao conjunto de vértices pertencentes ao ramo i de $T(G)$. Desta forma, uma *cotree* com r ramos definirá uma partição (α -partição) de $V(G)$ com r elementos, $\alpha(1), \dots, \alpha(r)$. Considere $|\alpha(i)| = a(i)$.

Uma forma alternativa para formar $\alpha(i)$ é procurar o i -ésimo filho da raiz e , a partir deste nodo, verificar seu conjunto de folhas, sejam estas folhas “filhos”, “netos”, “bisnetos”, etc. Denotaremos por $f(i)$ o número de filhos daquele i -ésimo nodo. Se $f(i) \neq 0$, estenderemos nossa notação; denotaremos por $\beta(i, j)$ o conjunto de folhas do j -ésimo sub-ramo do i -ésimo nodo com $|\beta(i, j)| = b(i, j)$. Observe que $f(i) \leq a(i)$.

Com o cografo mostrado na Figura 4.2 temos: $\alpha(1) = \{a, b\}$, $\alpha(2) = \{c, d, e, f, g\}$, e como $f(1)$ e $f(2) \geq 2$, temos $\beta(1, 1) = \{a\}$, $\beta(1, 2) = \{b\}$, $\beta(2, 1) = \{c, d\}$, $\beta(2, 2) = \{e, f\}$ e $\beta(2, 3) = \{g\}$.

Note que os conjuntos definidos como $\beta(i, j)$ também formam uma partição para o conjunto de vértices de G . Neste caso, chamaremos esta decomposição de $V(G)$ de β -partição.

Como estaremos trabalhando com G e, possivelmente, outro grafo H , usaremos índices para diferenciar uma função ou conjunto de determinado grafo, por exemplo, $\alpha_G(i)$ é o i -ésimo elemento da α -partição de G , $f_H(i)$ é o número de filhos do i -ésimo elemento da α -partição de H . Quando os índices forem omitidos, estaremos fazendo referência ao grafo G .

Com esta notação, podemos escrever

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^r a(i) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) = n.$$

4.2 Caracterização

Esta seção tem como objetivo caracterizar a família dos cografos apresentando alguns resultados obtidos por *D. G. Corneil*, *H. Lerchs* e *L. Stewart Burlingham* em [6]. Os resultados aqui apresentados são válidos para cografos conexos e desconexos.

Lema 3 *Todo subgrafo induzido H de um cografo é um cografo.*

Prova: Como qualquer subgrafo induzido H de G pode ser construído através da remoção sucessiva de vértices de $V(G)$, é suficiente mostrar que H com $|V(H)| = |V(G)| - 1$ é um cografo.

Seja G um cografo e $T(G)$ sua *cotree*, H um subgrafo induzido de G tal que $V(H) = V(G) \setminus \{x\}$, com $x \in V(G)$. O subgrafo H só será um cografo se conseguirmos construir $T(H)$.

Para a construção de $T(H)$, assumamos que y é pai de x em $T(G)$. Teremos os seguintes casos:

- i. Se y tem mais de dois filhos, construa $T(H)$ removendo a folha x de $T(G)$.
- ii. Se y tem exatamente dois filhos, x e x' , faça:
 - Se x' é folha, construa $T(H)$ removendo x e y de $T(G)$ e fazendo x' ser filho de seu “avô”; ou
 - Caso contrário, remova x , x' e y de $T(G)$ e ligue todos os filhos de x' ao pai de y .

Como conseguimos apresentar uma *cotree* para H , $T(H)$, temos que H é cografo. \square

É fácil notar que se G não induz subgrafo isomorfo a P_4 , então um subgrafo induzido H de G também não induz. Esta característica nos dá uma prova alternativa para o Lema 3. O Teorema 9 mostra esta e outras características da família dos cografos.

Teorema 9 *As seguintes sentenças são equivalentes:*

1. G é um cografo;
2. Qualquer subgrafo não trivial de G tem pelo menos dois vértices gêmeos (Definição 13);
3. G não contém P_4 induzido;
4. O complemento de qualquer subgrafo conexo não trivial de G é desconexo;
5. Todo subgrafo conexo de G tem diâmetro (Definição 21) menor ou igual a 2.
6. Qualquer subgrafo de G possui propriedade CK (Definição 20).

Prova: $(1 \Rightarrow 2)$. Pelo Lema 3 é suficiente mostrar que G possui pelos menos dois vértices gêmeos. Se G é cografo não trivial, então $T(G)$ possui pelo menos um nodo com dois filhos que são folhas, x_1 e x_2 (lembre-se que quando G é desconexo, somente o nodo raiz de $T(G)$ possui apenas um filho, mesmo assim, a afirmação acima ainda é válida). Se o pai de x_1 e x_2 é 0-nodo, então $N(x_1) = N(x_2)$; caso contrário, $N[x_1] = N[x_2]$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Suponha que G contém um P_4 induzido. Pelo Lema 3, P_4 é um cografo. Então, em P_4 existe pelo menos dois vértices gêmeos. Seja $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $A(P_4) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$.

Verificaremos se existe alguma aresta a mais para este P_4 não ser induzido. Temos os seguintes casos.

- Se v_1 e v_2 são gêmeos ou v_2 e v_3 são gêmeos, então existe (v_1, v_3) .

- Se v_1 e v_3 são gêmeos ou v_2 e v_4 são gêmeos, então existe (v_1, v_4) .
- Se v_1 e v_4 são gêmeos ou v_3 e v_2 são gêmeos, então existe (v_2, v_4) .

Assim sendo, H não é um P_4 induzido.

(3 \Rightarrow 4). Se G tem $n \leq 3$, G é um P_3 , um K_3 ou um P_2 e o complemento de G , \overline{G} , é desconexo. Se $n = 4$ com G e \overline{G} conexos, então G e \overline{G} são isomorfos a P_4 .

Suponha $n \geq 5$ e com G e o complemento de cada subgrafo conexo de G também conexo. Então G é conexo.

Seja a aresta $(a, b) \in A(G)$. Obviamente $(a, b) \notin A(\overline{G})$, mas como \overline{G} também é conexo, então existe $x \in V(G)$ e um caminho P em \overline{G} tal que $|P| = 3$ (o menor possível e não pode ser maior que 3 senão encontramos um P_4 induzido) com $P = \{(a, x), (x, b)\}$.

Uma vez que G é conexo e não possui as arestas (a, x) e (x, b) , existe x' e $x'' \in V(G)$ e P' e P'' em G tal que $P' = \{(a, x'), (x', x)\}$ e $P'' = \{(x, x''), (x'', b)\}$. Em G não existem as arestas (a, x'') ou (x', b) , pois, caso contrário, o complemento do subgrafo $G[\{a, x', x, x'', b\}]$ seria desconexo.

Assim sendo, $G[\{x', x, x'', b\}]$ ou $G[\{a, x', x, x''\}]$ induzem um P_4 . ($\neg 4 \Rightarrow \neg 3$)

(4 \Rightarrow 5). Seja G um subgrafo com diâmetro maior que 2. Sem perda de generalidade, suponha G com diâmetro igual a 3.

Seja H o subgrafo de G formado pelas arestas que definem o diâmetro 3, digamos, $A(H) = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$, então $A(\overline{H}) = \{(a, c), (b, d), (a, d)\}$, ou seja H é conexo. (Observe que H é isomorfo a P_4 .) ($\neg 5 \Rightarrow \neg 4$).

(5 \Rightarrow 6). Se G não possui propriedade CK , então existe alguma clique que não possui vértice em comum algum conjunto independente.

Seja K_p esta clique e, sendo I_q um conjunto independente maximal, tem-se que $p \neq 1$.

Como $V(K_p) \cap I_q = \emptyset$, cada vértice em K_p é adjacente a algum vértice de I_q .

Além disso, todos os vértices de K_p não são adjacentes ao mesmo vértice de I_q , senão K_p não seria maximal. Logo existem pelo menos dois vértices $x, y \in V(K_p)$ adjacentes a dois vértices distintos $a, b \in I_q$, obtendo um diâmetro maior que 2.

(6 \Rightarrow 3). Suponha que G possui P_4 como subgrafo induzido. Seja $A(P_4) = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. A clique de tamanho dois $G[\{b, c\}]$ não possui vértice em comum com o conjunto independente $\{a, d\}$, ou seja, o subgrafo induzido de G não possui propriedade CK .

(4 \Rightarrow 1). Seja G um grafo que satisfaz a propriedade 4 e que \overline{G} não a satisfaz. Se H é um subgrafo conexo de \overline{G} , então \overline{H} é um subgrafo desconexo de G , mas como G satisfaz 3, então $\overline{\overline{H}} = H$ é desconexo, chegando a uma contradição. Portanto, se em G o complemento de qualquer subgrafo conexo não trivial é desconexo, então o complemento de qualquer subgrafo conexo não trivial de \overline{G} também é desconexo.

Vejamos que $(4 \Rightarrow 1)$ por indução em n . Como visto acima, para $n \leq 4$ esta sentença é verdadeira. Suponha que para grafos com $n < p$ a propriedade 4 é verdadeira e tome G' com $|V(G')| = p$. Se G' é conexo, analise os componentes conexos de $\overline{G'}$, caso contrário, analise os componentes conexos de G' . Por hipótese de indução, cada um destes componentes conexos é cografo. Ou seja, G' por si próprio é cografo por complementação. \square

Além destas características, a *cotree* de representação de um cografo G , $T(G)$, ajuda a reconhecer em tempo polinomial algum grafo da família (verifica se G é um cografo).

A próxima seção mostra como resolver este problema.

4.3 Algoritmo para reconhecimento da classe

A idéia inicial do algoritmo para reconhecer se um grafo é cografo parte do Lema 3.

Dado que todo subgrafo induzido de um cografo também é cografo, os pesquisadores de [7] assumem um cografo G e sua *cotree* $T(G)$ e verificam se $G + x$ é cografo, onde x é um vértice. Para isso, analisam as relações de adjacências de x com os vértices de G usando a $T(G)$.

O conjunto M , resultado do procedimento *Marque*(x), provê condições necessárias e suficientes para que $G + x$ seja um cografo, se G o for.

Assuma que $f(y)$ é o número de filhos de um nodo y de $T(G)$ e que $mf(y)$ é o número de filhos de y que são marcados pelo procedimento abaixo. Inicialize $mf(y) = 0$ para todo y .

Marque (x)

Marque todas as folhas de $T(G)$ que são adjacentes a x ;

Para cada nodo u marcado de $T(G)$ com $f(u) = mf(u)$ faça

Desmarque u ;

$mf(u) \leftarrow 0$;

Se $u \neq$ raiz então

Marque w ; { onde w é pai de u . }

$mf(w) \leftarrow mf(w) + 1$;

Insira u na lista de filhos marcados ou desmarcados de w ;

Fim { Se }

Fim { Para }

Se algum vértice ainda está marcado e $f(\text{raiz}) = 1$ então

Marque a raiz;

Fim { Se }

Fim { Marque }

Na verdade, o procedimento $Marque(x)$, prepara $T(G)$ para uma análise mais detalhada. A análise a ser tratada é baseada no Teorema 10. Considere M o conjunto de nodos ainda marcados depois do procedimento $Marque(x)$, p o nodo de M de nível mais baixo em $T(G)$ e q o nodo de M de mais alto nível em $T(G)$. Um nodo x é dito **propriamente marcado** se x está marcado e $mf(x) = f(x) - 1$.

Teorema 10 *Se G é um cografo e $T(G)$ é sua cotree, então*

- i. M é vazio, ou*
- ii.a. $M \setminus \{p\}$ consiste exatamente dos 1-nodos propriamente marcados do caminho que começa em p e termina na raiz e*
- ii.b. p é 0-nodo cujo pai é q ou p é 1-nodo cujo avô é q .*

O conjunto M devolvido pelo procedimento $Marque(v_i)$ contém nodos em $T(G_{i-1})$ que possuem pelo menos um descendente folha adjacente a v_i e pelo menos um descendente folha que não é adjacente ao vértice v_i . Se este conjunto M não satisfizer o Teorema 10, pelo menos um dos itens descritos abaixo acontece e conseqüentemente, G_i não é cografo.

- a. O conjunto $M \setminus \{p\}$ contém 0-nodo.
- b. Existe um 1-nodo em $M \setminus \{p\}$ que não é propriamente marcado.
- c. Existe algum nodo diferente da raiz em $M \setminus \{p\}$ cujo avô não está em $M \setminus \{p\}$.
- d. Os vértices de $M \setminus \{p\}$ não formam um caminho de 1-nodos até a raiz.
- e. O nodo p é um 0-nodo cujo pai não é q .
- f. O nodo p é um 1-nodo cujo avô não é q .

Em [7] os pesquisadores demonstram que sempre que uma das seis condições acima acontece, existe um P_4 induzido em $G + x$.

Lembre-se de que Algoritmo de reconhecimento trabalha com G sendo construído através da inclusão de vértice por vértice. O algoritmo final procura verificar se $G + x$ é cografo e constrói $T(G + x)$ se o for. Assim sendo, considera-se uma seqüência $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vértices de G e se T_i é a cotree correspondente a $G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}]$, constrói-se $T(G_{i+1})$ se G_{i+1} é cografo.

Se G_{i+1} é cografo, então algum dos itens *i.* ou *ii.* do Teorema 10 acontece.

- i. Suponha que M é vazio.

Caso 1. G_{i+1} é conexo

Então v_i é universal, podemos adicionar v_i como filho da raiz.

Caso 2. G_{i+1} é desconexo e G_i é conexo

Então v_i não é adjacente a alguém em G_{i+1} . Crie dois nodos, um 0-nodo e um 1-nodo. Faça este novo 1-nodo como raiz e o novo 0-nodo seu filho. Faça a raiz antiga e v_i serem filhos deste novo 0-nodo.

Caso 3. G_{i+1} e G_i são desconexos.

Novamente, v_i não é adjacente a alguém em G_{i+1} , podemos fazer de v_i um novo neto da raiz.

ii. Suponha que M não é vazio. Sejam p o elemento de M de nível mais baixo em $T(G_i)$, q o elemento de M de nível mais alto em $T(G_i)$ e A o conjunto de filhos marcados de p e B o conjunto de filhos não marcados de p .

Caso 1. Suponha que p é um 0-nodo

Se A possui apenas um elemento w então

– Se w é folha

Crie um 1-nodo, coloque-o no lugar de w e faça w e p filhos deste 1-nodo;

– Caso contrário faça p filho de w ;

Caso contrário

– Separe as subárvores que possuem raízes em B ;

Crie dois nodos, um 0-nodo e um 1-nodo. Faça este novo 0-nodo como pai do novo 1-nodo e como filhos do 1-nodo, v_i e p . Coloque as subárvores que possuem raízes em B como filhos do 0-nodo. Coloque o 0-nodo como filho de q .

Caso 2. Suponha que p é um 1-nodo, então use o Caso 1 substituindo A por B e 0-nodos por 1-nodos.

Em relação ao tempo de execução total deste último algoritmo temos:

- O procedimento $Marque(x)$ depende o grau do vértice x a ser incluído em G , logo é $O(gr(x))$.
- Examinar se M satisfaz o Teorema 10 leva tempo constante. Como $|M|$ é limitado por $gr(x)$, teremos tempo $O(|M|) = O(gr(x))$.
- A única alteração na *cotree* que pode requerer mais que o tempo constante é quando p é 0-nodo (1-nodo) com dois filhos marcados e desmarcados (não marcados). Nestes casos, devemos ter cuidado ao mover os filhos marcados e desmarcados, uma vez

que a cardinalidade deste conjunto é $O(gr(x))$ e a cardinalidade dos filhos que não foram marcados não é similarmente limitada.

- No procedimento *Marque*(x) mantemos uma lista de nodos marcados e desmarcados, portanto, podem ser acessados em tempo $O(gr(x))$. Assim sendo, todas as modificações podem ser feitas em tempo $O(gr(x))$.

Com isto, o algoritmo para reconhecimento da família dos cografos é $O(n + m)$, ou seja, é linear.

4.4 Cografos \times TSP

Suponha que $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_k$ são *Grafos Transitivos Seriais-Paralelos*, TSP, então um grafo direcionado \vec{G} é um TSP, se ([6]):

- \vec{G} é um grafo trivial;
- $\vec{G} = \vec{G}_1 || \dots || \vec{G}_k = (V(\vec{G}_1) \cup \dots \cup V(\vec{G}_k), A(\vec{G}_1) \cup \dots \cup A(\vec{G}_k))$, formando uma *composição paralela* dos grafos direcionados $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k$;
- $\vec{G} = \vec{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \vec{G}_k = (V(\vec{G}_1) \cup \dots \cup V(\vec{G}_k), (V(\vec{G}_i) \times V(\vec{G}_j)) - (A(\vec{G}_1) \cup \dots \cup A(\vec{G}_k)))$, formando uma *composição serial* dos grafos direcionados $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k$;

Também são definidos como aqueles grafos direcionados que não possuem subgrafo induzido isomorfo ao grafo da Figura 4.4.



Figura 4.4: Grafo orientado proibido para a família dos grafos TSP.

Logo, um cografo G é um grafo subjacente (Definição 3) de um TSP, isto é, existe uma orientação \vec{G} de G tal que \vec{G} é um TSP.

Os grafos TSP são grafos direcionados e a orientação de suas arestas é definida pela operação de composição serial, desde que a operação de composição paralela somente justapõe grafos direcionados, isto é, não acrescenta arestas.

Se \vec{G}_i e \vec{G}_j são TSP, a orientação dada a toda aresta do conjunto $\{(x, y), \text{ com } x \in V(\vec{G}_i) \text{ e } y \in V(\vec{G}_j)\}$ é de x para y ($x \rightarrow y$) (ou $y \rightarrow x$). Dessa forma, a transitividade das orientações de \vec{G}_i e \vec{G}_j é mantida no novo grafo TSP construído.

Temos, portanto, que os cografos formam uma subclasse dos grafos de comparabilidade. A inclusão é própria pois P_4 é um grafo de comparabilidade (Figura 4.4).

Assim como os cografos, os grafos TSP possuem uma única árvore de representação, **SP-tree**. A construção da *SP-tree* de um TSP \vec{G} se assemelha a construção da *cotree* de um cografo. Assim, podemos fazer uma equivalência:

1. As folhas de uma *SP-tree* também correspondem aos vértices de \vec{G} ;
2. Os nodos internos também são rotulados:

Onde encontrávamos 1-nodo, agora teremos S-nodo;

Onde encontrávamos 0-nodo, agora teremos P-nodo;

Na *SP-tree* de \vec{G} , os S-nodos definirão as direções nas arestas. A Figura 4.5 mostra um TSP e sua respectiva *SP-tree*. (Observe a correspondência das arestas deste TSP com aquele mostrado na Figura 4.2 no início deste capítulo.)

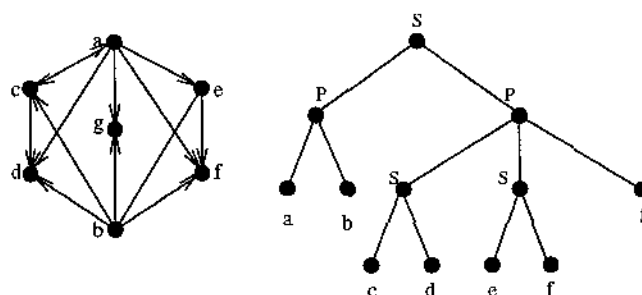


Figura 4.5: Exemplo de um TSP e sua árvore de representação.

Assim sendo, os grafos TSP correspondem a todas as orientações transitivas dos cografos, da mesma forma que a classe dos cografos corresponde aos grafos subjacentes da família dos TSP, a menos de isomorfismos.

4.5 Algoritmos Polinomiais

Muitos problemas que são considerados difíceis para grafos em geral possuem solução polinomial quando a família tratada é a dos cografos. Podemos citar o problema de encontrar o número cliques maximais de um grafo, número de orientações transitivas, os conjuntos independentes.

A solução para estes e outros problemas pode ser encontrada usando $T(G)$. As versões iniciais dos algoritmos abaixo são mostradas em [6] em forma de tabela. Algumas modificações foram necessárias para adaptar a nomenclatura deste texto. Considere k como sendo a altura de $T(G)$.

Algoritmo 1 - O valor atribuído a raiz é o número de cliques de G

```

Atribua o valor 1 para as folhas de  $T(G)$ ;
Para  $i$  variando de  $k - 1$  até 0 faça
  Para cada nodo não folha do nível  $i$  faça
    Se nodo é 1-nodo então
       $aux \leftarrow$  multiplicação do valor de seus filhos;
    Senão
       $aux \leftarrow$  soma do valor de seus filhos;
    Fim { Se }
  Atribua o valor  $aux$  para nodo corrente;
Fim { Para }
Fim { Para }

```

Algoritmo 2 - A Fórmula atribuída a raiz encontra o conjunto de cliques de G

```

Para  $i$  variando de  $k - 1$  até 0 faça
  Para cada nodo não folha do nível  $i$  faça
    Se nodo é 1-nodo então
       $aux \leftarrow$  conjunção do rótulo de seus filhos usando  $\wedge$ ;
    Senão
       $aux \leftarrow$  disjunção do rótulo de seus filhos usando  $\vee$ ;
    Fim { Se }
  Rótulo do nodo corrente  $\leftarrow aux$ ;
Fim { Para }
Fim { Para }

```

Algoritmo 3 - O valor atribuído a raiz é o tamanho da maior clique de G , $\omega(G)$

```

Atribua o valor 1 para as folhas de  $T(G)$ ;
Para  $i$  variando de  $k - 1$  até 0 faça
  Para cada nodo não folha do nível  $i$  faça
    Se nodo é 1-nodo então
       $aux \leftarrow$  soma do valor de seus filhos;
    Senão
       $aux \leftarrow$  o valor máximo dentre seus filhos;
    Fim { Se }
  Atribua o valor  $aux$  para nodo corrente;
Fim { Para }
Fim { Para }

```



Algoritmo 4 - O valor atribuído a raiz é o número de orientações transitivas de G

```

Atribua o valor 1 para as folhas de  $T(G)$ ;
Para  $i$  variando de  $k - 1$  até 0 faça
  Para cada nodo não folha do nível  $i$  faça
    Se nodo é 1-nodo então
       $aux \leftarrow (\text{o número de filhos})! \times \text{multiplicação do valor de seus filhos}$ ;
    Senão
       $aux \leftarrow \text{multiplicação do valor de seus filhos}$ ;
    Fim { Se }
  Atribua o valor  $aux$  para nodo corrente;
Fim { Para }
Fim { Para }

```

Além disso, se o valor atribuído aos 1-nodos e aos 0-nodos dos Algoritmos 1, 2 e 3 for trocado, teremos a solução para número de conjunto independentes, fórmula para encontrar estes conjuntos e o tamanho do maior conjunto independente, respectivamente.

A *cotree* do cografo da Figura 4.2 quando usada nos algoritmos mostrados, retorna 6, $(a \vee b) \wedge ((c \wedge d) \vee (e \wedge f) \vee g)$, 3 e 96, respectivamente. O Algoritmo 1 diz que G tem 6 cliques; a fórmula dada pelo Algoritmo 2 nos diz que as clique são geradas por $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, e, f\}$, $\{b, e, f\}$, $\{a, g\}$ e $\{b, g\}$. Como um cografo é um grafo perfeito, o tamanho da maior clique dada pelo Algoritmo 3 é igual ao número cromático de G , ou seja, $\chi(G) = 3$.

O Algoritmo 4 diz que existem 96 orientações transitivas para o cografo G da Figura 4.2, uma delas é apresentada na Figura 4.5 da Seção 4.4.

Outro problema tratado de forma polinomial usando $T(G)$ é o problema do *isomorfismo*. Outras famílias que se sabe possuir solução polinomial para o problema do isomorfismo são grafos planares, grafos de intervalos e k -trees com k fixo. Coincidentemente ou não, os grafos destas duas últimas famílias também possuem uma única árvore de representação.

Uma das características mostradas pelo Teorema 9 é que os cografos não possuem P_4 como subgrafo induzido. Existem outras classes que possuem “subgrafos proibidos”. O Teorema abaixo, encontrado em [6], diz que P_4 é o maior “subgrafo proibido” que origina uma família, a dos cografos, que possui solução polinomial para o isomorfismo.

Teorema 11 *Dado um grafo conexo H , C_H denota o conjunto de grafos que não possuem H com subgrafo induzido (H é proibido). Se $H \neq \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, então o problema do isomorfismo é NP-Completo.*

As classes C_{P_1} , C_{P_2} , C_{P_3} e C_{P_4} são, respectivamente, grafos nulos ($n = 0$), grafos vazios ($m = 0$), grafos formados pela união disjunta de cliques (cografo de *cotree* completa no nível 3 e raiz com rótulo 0 - veja comentários na Seções 4.1 e 4.6.1) e os cografos conexos.

4.6 Cografos e a Conjectura de Hilton

Nesta seção relembramos a Conjectura de *Hilton* (Conjectura 2 do Capítulo 3) e verificamos que os cografos pertencem ao conjunto de grafos cobertos por esta conjectura. Este resultado, embora simples, nos incentivou a estudar a classe.

No Capítulo 3 foram citadas algumas famílias de grafos que satisfazem esta conjectura. A Seção 3.4 exibe o Teorema 8 provado por *D. G. Hoffman* e *C. A. Rodger* ([14]) que mostra que os multipartidos completos, um subconjunto da família dos cografos, satisfazem a conjectura, ou seja, um grafo desta família pertence à *Classe 2* se e somente se é *SO* (no caso, se e somente se são *O* - observe que $O \Rightarrow SO$).

Um importante resultado a respeito de cografos é mostrado no teorema abaixo.

Teorema 12 *Se G é um cografo, então $\Delta(G) \geq n/2$.*

Prova: Se G é um cografo, então admite uma *cotree* com r ramos. Teremos que $V(G) = \alpha(1) \cup \dots \cup \alpha(r)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $1 \leq a(1) \leq \dots \leq a(r)$.

Vamos construir um grafo G' da seguinte forma:

1. $V(G') = V(G)$, e
2. $A(G') = A(G) \setminus \{(u, w) \mid u, w \in \alpha(i), \text{ para todo } i, 1 \leq i \leq r\}$.

Dessa forma temos que:

$$\Delta(G) \geq \Delta(G'). \quad (4.1)$$

Em G' , os vértices que estão em $\alpha(1)$ tem grau $\Delta(G') = n - a(1)$.

$$\begin{aligned} \Delta(G') &\geq? \frac{n}{2} \\ n - a(1) &\geq? \frac{n}{2} \\ 2a(1) &\leq? n \\ a(1) + a(1) &\leq? a(1) + a(2) + \dots + a(r) \\ a(1) &\leq? a(2) + a(3) + \dots + a(r) \end{aligned}$$

Como $a(1)$ é o menor, então $a(1) \leq a(2) + \dots + a(r)$. Portanto

$$\Delta(G') \geq \frac{n}{2}. \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2) temos que $\Delta(G) \geq \frac{n}{2}$. \square

A Figura 4.6 mostra que o Teorema 12 só vale quando G é um cografo conexo. Na figura, G tem $\Delta(G) = 4$ e $n = 12$.

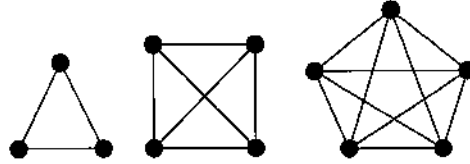


Figura 4.6: Exemplo de cografo desconexo G com 12 vértices e $\Delta(G) = 4$.

Os Teoremas 7 (Capítulo 3) e 12 nos levam ao seguinte corolário.

Corolário 5 *Se G é um cografo conexo, então G possui no máximo um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ que é overfull.*

O Teorema 12 nos diz que todos os cografos estão dentro da Conjectura 2. Isto nos induz a procurar colorir com Δ cores, todos os cografos que não são *SO*.

4.6.1 Coloração de Arestas - Resultados Iniciais

Os teoremas abaixo mostram alguns subconjuntos dos cografos que já conhecemos e outro que vamos definir como uma família de cografos *overfull*.

Teorema 13 *Se G é um grafo multipartido completo, então G é um cografo.*

Prova: Suponha que G não é cografo, portanto possui P_4 induzido. Sem perda de generalidade, seja este P_4 formado pelas arestas (v_1, v_2) , (v_2, v_3) e (v_3, v_4) . Pela definição de multipartido completo (Seção 3.4 - Definição 14), temos que v_1 está em um elemento de partição diferente de v_2 , e v_1 está no mesmo elemento de partição que v_3 , pois não existe a aresta (v_1, v_3) . Da mesma forma, v_2 está no elemento de partição que v_4 . Isto levaria a existência de (v_1, v_4) . Logo G não induz P_4 . \square

O Teorema 13 diz que os grafos multipartidos completos são cografos. Logo, podem ser representados por *cotrees* que, no caso, estas *cotrees* serão de nível no máximo 2 (veja Seção 4.1). A Figura 4.7 mostra a *cotree* do grafo multipartido completo da Figura 4.10 da página 47.

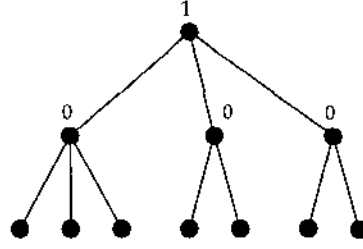


Figura 4.7: *Cotree* do grafo multipartido completo $K_{3,2,2}$.

Além disso, podemos afirmar que se G é completo, então G é cografo, uma vez que os grafos completos formam um subconjunto dos grafos multipartidos completos.

Contando as arestas dos cografos relacionados às *cotrees* de nível 3 da Figura 4.8, observamos que esta família possui uma característica definitiva para incluir seus cografos na *Classe 2*: são *overfull* (Capítulo 3).

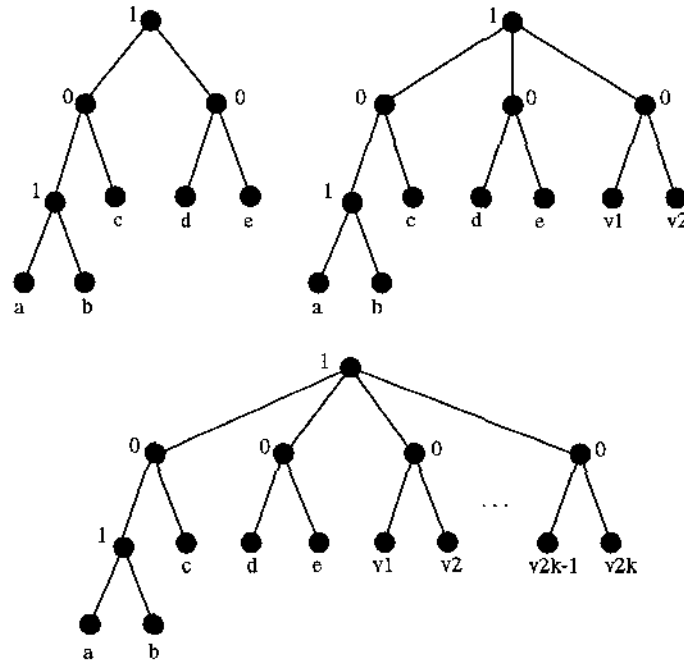


Figura 4.8: *Cotrees* de cografos *overfull*.

Teorema 14 *Seja $G = (\overline{((\{a\} \cup \{b\}) \cup \{c\}) \cup \{d\} \cup \{e\}})$. Seja F a família de grafos G_i tal que:*

- i.* $G_0 = G$;
- ii.* $G_k = (\overline{(\overline{G_{k-1}} \cup \{v_{2k-1}\} \cup \{v_{2k}\})}$.

Então F é uma família de cografos de ordem ímpar que são *overfull*.

Prova: Como G_0 tem cinco vértices e a cada novo grafo construído são incluídos dois novos vértices, temos que todo grafo pertencente a F tem ordem ímpar.

Para um grafo G_i chamaremos de m_i seu número de arestas ($m_i = m_{G_i}$) e de n_i seu número de vértices. Observando a Figura 4.9 e a Figura 4.8, temos que:

$$\begin{aligned} G_0 \text{ tem } m_0 &= 7, & G_1 \text{ tem } m_1 &= 7 + 2 * 5, & G_2 \text{ tem } m_2 &= 7 + 2 * 5 + 2 * 7, \\ n_0 &= 5 \text{ e} & n_1 &= 5 + 2 \text{ e} & n_2 &= 5 + 2 + 2 \text{ e} \\ \Delta(G_0) &= 3; & \Delta(G_1) &= 3 + 2; & \Delta(G_2) &= 3 + 2 + 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_k \text{ tem } m_k &= 7 + 2 * (5 + 7 + 9 + \dots + (5 + 2(k - 1))), \\ n_k &= 5 + 2k \text{ e} \\ \Delta(G_k) &= 3 + 2k, \text{ para } k \geq 1. \end{aligned}$$

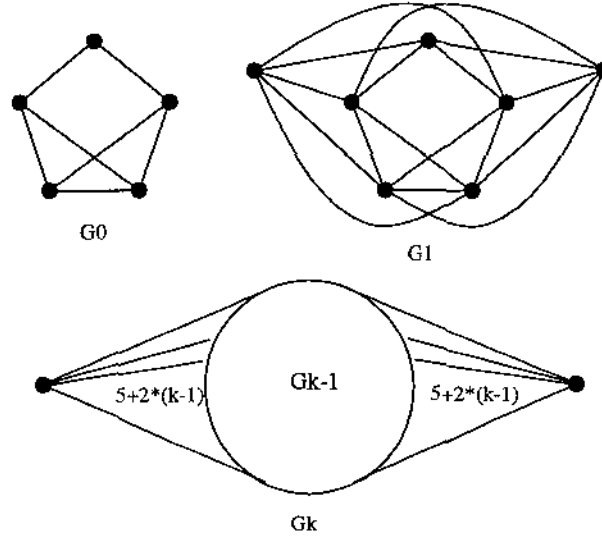


Figura 4.9: Família de cografos *overfull* - exemplos G_0 (envelope), G_1 , G_k .

Para se saber se estes grafos são *overfull* temos de saber se $m_k > \Delta(G_k) * \frac{(n_k-1)}{2}$. O número de arestas de G_k é igual a 7 mais duas vezes a soma de uma P.A. de k termos (S_k), de primeiro termo igual a 5, razão igual a 2 e k -ésimo termo igual a $5 + 2(k - 1)$ (veja indução acima).

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)}{2} * k \Rightarrow S_k = k^2 + 4k.$$

Finalmente podemos verificar se condição para grafos *overfull* é válida para grafos da família F .

$$\begin{aligned}
m_k &>? \Delta(G_k) * \frac{(n_k - 1)}{2} \\
7 + 2 * (k^2 + 4k) &>? (3 + 2k) * \frac{(5 + 2k - 1)}{2} \\
14 + 4k^2 + 16k &>? 6k + 12 + 4k^2 + 8k \\
16k - 14k &>? 12 - 14 \\
k &>? -1,
\end{aligned}$$

Ou seja, para todo $k \geq 0$, $m_k > \Delta(G_k) * \frac{(n_k - 1)}{2}$. Portanto, todo G_k pertencente a F é *overfull*. \square

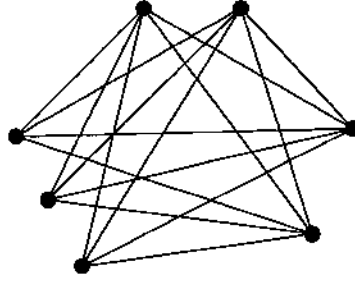


Figura 4.10: Cografo *overfull* que não pertence a F .

Nem todo cografo que é *overfull* pertence a família F . A Figura 4.10 nos mostra um exemplo.

Os Teoremas 13 e 14 nos mostram que já sabemos classificar e colorir as arestas de alguns cografos: os multipartidos completos ([14], Seção 3.4) e uma família de cografos *overfull*. Além disso, se um cografo possuir vértice universal (Figura 4.11), sabemos colorir suas arestas usando o teorema e a construção dada por *M. Plantholt* ([20]).

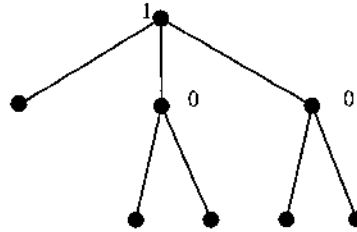


Figura 4.11: Exemplo de uma *cotree* de cografo com vértice universal.

Algumas classes de grafos que já foram classificadas como *Classe 1* têm uma característica em comum: Δ ímpar. Podemos citar três dessas classes: grafos indiferença com

Δ ímpar, grafos de intervalo com Δ ímpar ou mais geralmente grafos duplamente cordais com Δ ímpar; esta última família contém a anterior. O Teorema 14 nos mostra que não podemos seguir esse caminho para os cografos, uma vez que existem cografos que estão na *Classe 2* e tem Δ ímpar.

4.7 Resumo

Este capítulo apresentou a família dos grafos cografos, suas características, sua *cotree* e suas equivalências.

Além disso, vimos um algoritmo polinomial para reconhecimento da classe usando a *cotree*. Vimos também que esta mesma *cotree* nos leva a outros algoritmos polinomiais para problemas clássicos em Teoria dos Grafos.

Provamos que os cografos são grafos cobertos pela Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd*, ou seja, conjecturamos que um cografo está na *Classe 2* se e somente se é *SO*. Alguns resultados iniciais que obtivemos são apresentados, embora os resultados mais importantes sejam encontrados nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Cografos que são Subgrafo Overfull

Como visto no Capítulo 3 ser *overfull* é uma condição suficiente para um grafo pertencer a *Classe 2*. Vimos também que se um grafo G possui um subgrafo *overfull* H com o mesmo Δ , G é chamado de **subgrafo overfull**, e se esse subgrafo H é gerado pela vizinhança de algum vértice, então G é **vizinhança overfull**. Obviamente, ser *SO* ou *NO* também é suficiente para G estar na *Classe 2*. A Figura 3.1 mostra como estas classes em geral estão relacionadas.

Para grafos split e indiferença, tem-se que *SO* é equivalente a *NO* ([10]). Para os grafos multipartidos completos, *SO* é equivalente a *Classe 2* ([14]).

Este capítulo mostra um subconjunto dos cografos que define grafos que se são *SO*, são *O* ou *NO* ([1]).

5.1 Cografo de cotree completa de nível 3 - CCC3

Relembramos que uma *cotree de nível k* é uma *cotree* com altura k . A raiz está no nível 0. Uma *cotree completa de nível k* é uma *cotree de nível k* com todas as folhas no nível k (Seção 4.1).

Do capítulo 4, sabemos que os cografos de *cotree* de nível 1 e 2 já foram classificados. Passamos, então, a estudar os cografos de *cotree* completa de nível 3.

Seja G um cografo conexo com *cotree* completa de nível 3. Para G , usando a nomenclatura vista na página 32, temos $r \geq 2$, pois G é conexo, e $b(i, j) \geq 2$, para $1 \leq j \leq f(i)$, pois a *cotree* é completa. A Figura 5.1 mostra uma *cotree* completa de nível 3 genérica usando a nomenclatura da Seção 4.1.

O conjunto de arestas de G pode ser visto como o conjunto de arestas do grafo multipartido completo $(K_{\alpha(1), \dots, \alpha(r)})$ nos vértices da α -partição unido ao conjunto de arestas das cliques $(K_{\beta(i, j)})$ definidas pelos elementos da β -partição.

Observe que os vértices de um mesmo elemento da β -partição possuem o mesmo grau.

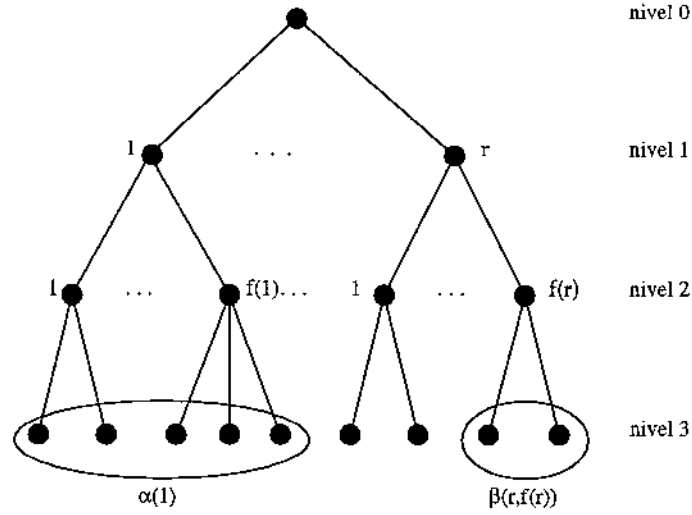


Figura 5.1: Árvore completa de nível 3.

Dessa forma,

$$gr(i, j) = b(i, j) - 1 + n - a(i),$$

onde $gr(i, j)$ é o grau dos vértices que pertencem ao j -ésimo elemento da β -partição que é o filho do i -ésimo elemento da α -partição. Observe que $b(i, j) - 1$ é o grau destes vértices quando restrito à clique (que tem tamanho $b(i, j)$) e que $n - a(i)$ é o grau no multipartido completo.

A cardinalidade de $A(G)$ é dada por:

$$|A(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) gr(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) (b(i, j) - 1 + n - a(i)) = m.$$

Vejamos o grau máximo de G ,

$$\Delta(G) = \max_{i,j} gr(i, j) = \max_{i,j} (b(i, j) - 1 + n - a(i)).$$

Como 1 e n são constantes, podemos nos preocupar em maximizar $b(i, j) - a(i)$, ou simplesmente, dado que $a(i) \geq b(i, j)$, minimizar $a(i) - b(i, j)$ para saber quais elementos da α -partição possuem os vértices de grau máximo em G .

Seja $p(i, j) = a(i) - b(i, j)$. Consideremos uma ordenação dos elementos da β -partição, onde para cada elemento da α -partição ($\alpha(i)$ para $1 \leq i \leq r$) $p(i, 1) \leq p(i, 2) \leq \dots \leq p(i, f(i))$.

Seja $p(i) = \min_{1 \leq j \leq f(i)} \{p(i, j)\}$. Consideremos uma ordenação tal que $p(1) \leq p(2) \leq \dots \leq p(r)$. Esta, origina uma ordenação nos elementos da α -partição. Dessa forma,

$$p(1) = \min_{i,j} p(i, j),$$

o que faz

$$\Delta(G) = n - 1 - p(1).$$

Veja a Figura 5.2.

Reescrevendo, temos

$$|A(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j)(n - 1 - p(i, j)) = m.$$

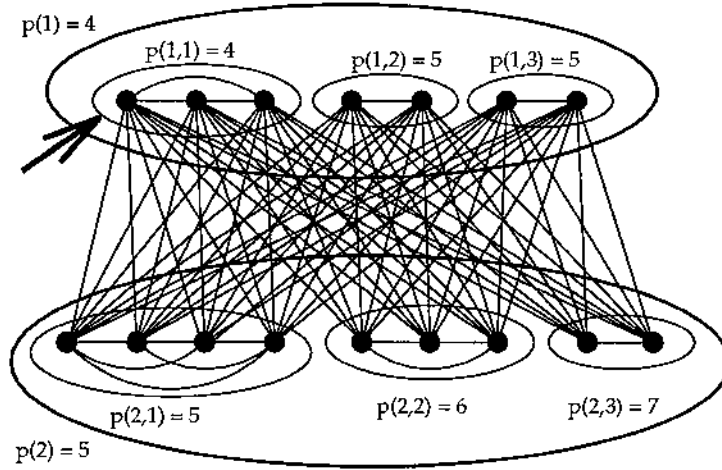


Figura 5.2: Cografo com as partições ordenadas por $p(i, j)$ e $p(i)$. O elemento $\beta(1, 1)$, indicado na figura, contém os vértices de grau Δ .

Esta estrutura de *cotree* completa de nível 3 nos leva a uma tentativa de coloração dividida em etapas: analisar e colorir as arestas do grafo multipartido completo e depois analisar e colorir as arestas dos subgrafos completos. A princípio, essa é uma boa alternativa, uma vez que sabemos colorir grafos multipartidos completos ([14]) e grafos completos ([12]).

5.1.1 CCC3 Overfull

Seja $m = |A(G)|$. Usando a nomenclatura dada na Seção 4.1, temos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j)(n - 1 - p(i, j)) \\ m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} [(n - 1)b(i, j) - b(i, j)p(i, j)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} (n-1) b(i, j) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j) \\
m &= \frac{1}{2} (n-1)n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j)
\end{aligned}$$

Verifiquemos a condição para G ser *overfull*. O valor de n deve ser ímpar e

$$\begin{aligned}
m &> \frac{1}{2} \Delta(G)(n-1) \\
\frac{1}{2} (n-1)n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j) &> \frac{1}{2} (n-1-p(1))(n-1) \\
\frac{1}{2} (n-1)n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j) &> \frac{1}{2} (n-1)n + \frac{1}{2} (n-1)(-1-p(1)) \\
\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j) &< (n-1)(1+p(1)).
\end{aligned}$$

Lema 4 *Seja G um cografo com cotree completa de nível 3 e n ímpar. Um grafo G é overfull se e somente se*

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f(i)} b(i, j) p(i, j) < (n-1)(1+p(1)).$$

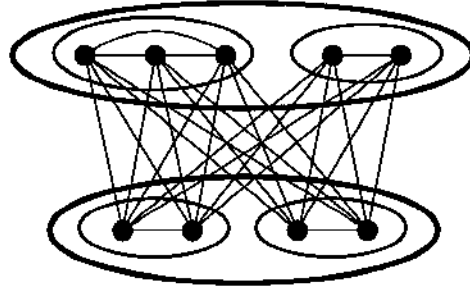


Figura 5.3: Cografo de cotree completa de nível 3 e *overfull* com $a(1) = 5$, $a(2) = 4$, $b(1,1) = 3$, $b(1,2) = 2$, $b(2,1) = 2$ e $b(2,2) = 2$.

A Figura 5.3 mostra o exemplo que um cografo que satisfaz o Lema 4.

5.1.2 CCC3 Subgrafo-Overfull

Nesta seção estaremos preocupados em encontrar cografos com *cotrees* completas de nível 3 que sejam *SO*.

O Corolário 5 (Seção 4.6) nos diz que se encontrarmos em algum cografo G um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, então H é o subgrafo *overfull* de G . Em [14] foi provado que todo cografo *SO* de *cotree* (completa ou não) de nível 2 é, na verdade, *O*. Este resultado não se estende para cografos de *cotree* completa de nível 3. A Figura 5.4 mostra o exemplo

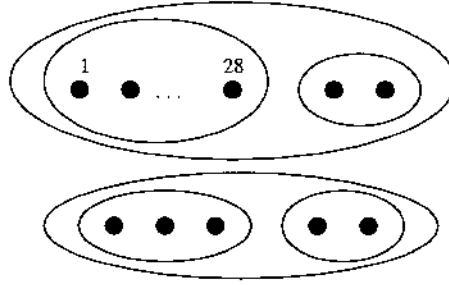


Figura 5.4: Cografo *SO* de cotree completa de nível 3.

de um cografo com 35 vértices distribuídos em $a(1) = 30$ com $b(1,1) = 28$ e $b(1,2) = 2$ e $a(2) = 5$ com $b(2,1) = 2$ e $b(2,2) = 3$. Este cografo não é *overfull* e possui um subgrafo próprio H gerado por $\beta(1,1) \cup \beta(2,1) \cup \beta(2,2)$ que é *overfull*. Logo, é *SO*. Observe que a *cotree* de H não é uma *subcotree* da *cotree* de G (Figura 5.5).

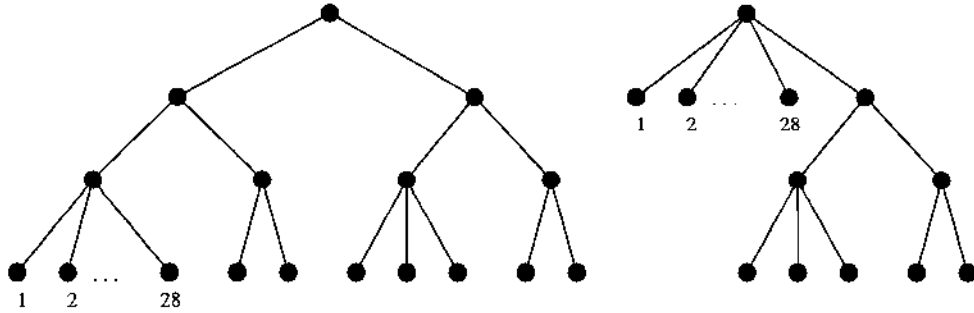


Figura 5.5: *Cotree* de G e *cotree* de $H = G \setminus \beta(1,2)$, respectivamente.

Lema 5 *Sejam G um cografo de cotree completa de nível 3 e H um subgrafo induzido de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$. Então H é cografo de cotree de nível 3.*

Prova: Seja H um subgrafo induzido de G , logo H é um cografo. Suponha $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Se $V(G) = V(H)$, então H é cografo de *cotree* de nível 3. Considere H um subgrafo induzido próprio de G , então $|V(G) \setminus V(H)| \geq 1$.

Este conjunto $V(G) \setminus V(H)$ está contido em um único $\alpha(i)$, $1 \leq i \leq r$, tal que $\alpha(i)$ contém Δ -vértices de G , pois caso contrário, $\Delta(H) < \Delta(G)$. Sem perda de generalidade, seja $i = 1$.

Por hipótese, G é um cografo de cotree completa de nível 3, então $r \geq 2$ e portanto H contém vértices no nível 3. \square

Lema 6 *Sejam G um cografo com cotree completa de nível 3 e H subgrafo próprio induzido de G tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$. Então todos os Δ -vértices de H pertencem a um único elemento da α -partição de G , $\alpha(i)$, e todo $v \in V(H) \setminus \alpha(i)$ satisfaz*

$$gr_H(v) \leq \Delta(G) - (|V(G)| - |V(H)|).$$

Prova: Sabemos que se $v \in \beta_G(i, j)$, então $gr_G(v) = n - 1 - p_G(i, j)$, onde $p_G(i, j) = a_G(i) - b_G(i, j)$ é o número de “primos” de v . Portanto, se $gr_G(v) = \Delta(G)$, $gr_H(v) = \Delta(H) = \Delta(G)$ e estamos retirando x vértices ($|V(H)| = |V(G)| - x$) para construir H , então esses x vértices devem ser retirados de $p_G(i, j)$ dentre os vértices que são “primos” de v .

Dessa forma os únicos vértices que tem grau $\Delta(G)$ também em H são aqueles para os quais $p_H(i, j) = p_G(i, j) - (|V(G)| - |V(H)|)$. Nestas condições o decréscimo em $p_G(i, j)$ deve ser igual ao decréscimo em n .

Para que $p_G(i, j)$ decresça o mesmo número de vértices que n , todos os vértices retirados devem ser primos de v . Dessa forma, todos os vértices que preservarem o grau máximo estão no mesmo elemento da α -partição de G .

Se $\alpha_H(i)$ é o elemento da α -partição de H que contém os $\Delta(H)$ -vértices e $w \notin \alpha(i)$, então $gr_H(w) \leq \Delta(G) - (|V(G)| - |V(H)|)$. \square

Lema 7 *Sejam G um cografo de cotree completa de nível 3 e H um subgrafo induzido overfull de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$. Então todos os Δ -vértices de H estão em um único elemento da α -partição de G e nenhum vértice v deste elemento da partição com $gr_G(v) < \Delta$ pertence a H .*

Prova: Pelo Lema 6, todos os Δ -vértices de H estão em um único elemento da α -partição de G .

Sem perda de generalidade, vamos supor que estes vértices estão em $\alpha_G(i)$. Seja $v \in \alpha_G(i)$, com $gr_G(v) < \Delta(G)$. Então, $gr_G^*(v) = 0$. Sendo H overfull, pelo Corolário 3, $v \notin V(H)$. \square

A Figura 5.6 auxilia na prova do Teorema 15.

Teorema 15 *Seja G um cografo SO com cotree completa de nível 3. Então, G é O ou G é NO.*

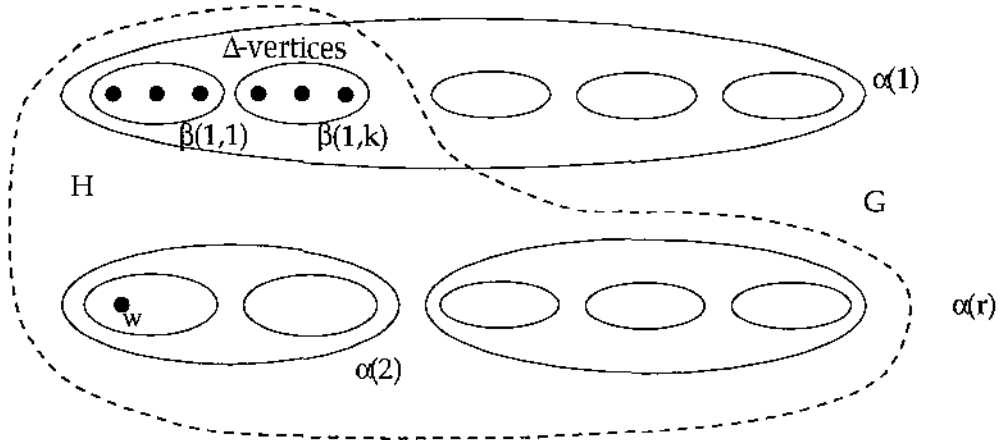


Figura 5.6: Grafo G e o subgrafo induzido H com $|V(G) \setminus V(H)| > 0$.

Prova: Seja G um cografo SO de *cotree* completa de nível 3 que não é O . Então, G contém um subgrafo próprio *overfull* H com $\Delta(G) = \Delta(H)$. Pela Lema 5, H é um cografo de *cotree* de nível 3.

Do Lema 7, todos os Δ -vértices de H pertencem a um único elemento da α -partição de G e nenhum vértice v deste elemento da partição com $gr_G(v) < \Delta$ pertence a H . Seja $D(H)$ o conjunto dos Δ -vértices de H . Então $D(H) = \beta_G(1,1) \cup \dots \cup \beta_G(1,k)$, com $k \geq 1$ e $b_G(1,1) = \dots = b_G(1,k)$. Logo, $|D(H)| = kb_G(1,1)$, com $k \geq 1$.

Ainda, do Lema 6 temos que todo vértice $v \in V(H) \setminus \alpha_G(1)$ tem $gr_H(v) \leq \Delta(G) - x$, onde $x = |V(G)| - |V(H)|$. Sendo H um subgrafo próprio de G , x é um inteiro positivo.

Como H é *overfull*, então $||V(H), \overline{V(H)}|| \leq \Delta(G) - 2$ (Corolário 4).

Uma vez que $||V(H), \overline{V(H)}|| \geq x(|V(H)| - |D(H)|)$, nosso cálculo segue em $\Delta(G) - 2 \geq x(|V(H)| - |D(H)|)$. (Lembrando que $\Delta(G) = |V(G)| - 1 - p_G(1) = |V(H)| - 1 - |D(H)| + b_G(1,1)$.)

$$\begin{aligned}
 \Delta(G) - 2 &\geq x(|V(H)| - |D(H)|) \\
 \Delta(G) &\geq x(\Delta(G) - b_G(1,1) + 1) + 2 \\
 \Delta(G) &\geq x\Delta(G) - x(b_G(1,1) - 1) + 2 \\
 (x-1)\Delta(G) &\leq x(b_G(1,1) - 1) - 2 \\
 \Delta(G) &\leq \frac{x(b_G(1,1) - 1) - 2}{(x-1)}
 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, a *cotree* de G é completa, $x > 1$. Observe, ainda, que $1 < \frac{x}{(x-1)} \leq 2$. Temos que

$$\Delta(G) \leq 2b_G(1,1) - 1.$$

Tome $w \in V(H) \setminus D(H)$; $gr_H(w) = kb_G(1,1) + q$, onde q é o número de vértices em sua vizinhança que não estão em $D(H)$. Do Lema 6, tem-se que $gr_H(w) \leq \Delta(G) - x$. Logo, $gr_H(w) < \Delta(G)$ e

$$\begin{aligned} kb_G(1,1) + q &< 2b_G(1,1) - 1 \\ kb_G(1,1) - 2b_G(1,1) &< -(q+1) \\ b_G(1,1)(k-2) &< -(q+1) \end{aligned}$$

Com a desigualdade acima, obrigatoriamente teremos

$$k < 2.$$

Logo $k = 1$ e H será gerado pela vizinhança de um Δ -vértice.

Portanto, G com subgrafo próprio *overfull* H é *NO*. □

O Teorema 15 diz que para os cografos de *cotree* completa de nível 3, $SO = O \cup NO$. Na verdade, se G é *SO*, ou G é *O* ou G é *NO*, não ambos.

De fato, suponha que G cografo de *cotree* completa de nível 3 pertence a $O \cap NO$. Sendo *NO*, G possui um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ que é gerado pela vizinhança de um Δ -vértice. Note que H não é um cografo de *cotree* completa de nível 3. Pelos Teoremas 7 e 12, G não contém outro subgrafo que é *overfull*. Sendo G *overfull*, então $G \cong H$, contradizendo o fato de G ser um cografo de *cotree* completa de nível 3.

5.1.3 Comentários

Para os grafos multipartidos completos, uma subclasse dos cografos, sabíamos que *O* equivale a *SO* ([14] e Seção 3.4). Esta afirmação não é sempre verdadeira para os cografos. Mesmo para os que possuem *cotree* completa de nível 3, temos exemplos de grafos que são *SO* e não são *O* (veja Figura 5.4). O Teorema 15 afirma que estes cografos tem de ser *NO*.

A Figura 3.1 mostra a relação entre as classes *O*, *NO* e *SO* para os grafos em geral. A parte hachurada da Figura 5.7 diz que não existe cografo *SO* de *cotree* completa de nível 3 nestas regiões.

A Figura 5.8 mostra que o Teorema 15 não pode ser estendido para cografos que possuem *cotree* de nível 3 que não são completas. O exemplo exhibe um cografo de *cotree* de nível 3 que é *SO* e possui subgrafo $H = G[V(G) \setminus \beta(1,4)]$ *overfull* com $f_H(1) = 3$. Logo G não é *NO*.

Um algoritmo para testar se um grafo é *SO*, necessita de encontrar um corte mínimo em um grafo especial ([11] e Capítulo 3). Para os cografos com *cotree* completa de nível 3, com uma simples contagem obteremos essa informação.

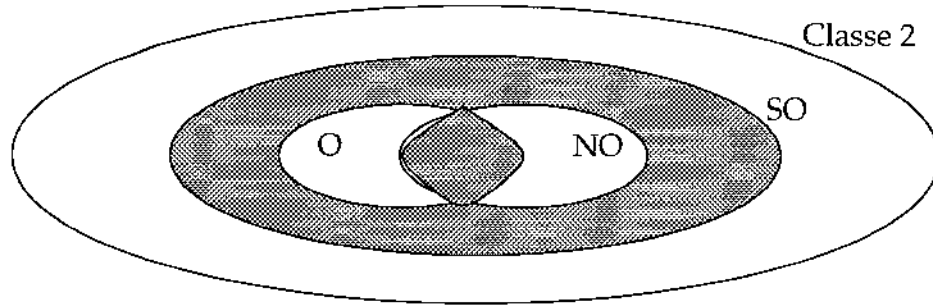


Figura 5.7: Conjuntos O , SO , NO e $Classe\ 2$ e os cografos de *cotree* completa de nível 3.

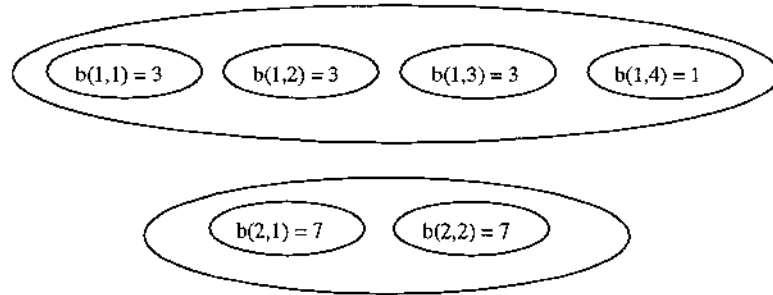


Figura 5.8: O subgrafo $G[V(G) \setminus \beta(1,4)]$ é *overfull*.

Nosso objetivo, agora, é verificar se a subclasse dos cografos com *cotree* completa de nível 3 é mais uma evidência para a conjectura de *Hilton* e *Chetwynd*.

5.2 Resumo

Este capítulo apresenta o primeiro resultado obtido durante os meses de pesquisa que antecederam este texto.

Neste capítulo descobrimos que se um cografo de *cotree* completa de nível 3 é SO , então é, na verdade, NO ou O . Vimos também que este resultado não se estende para cografos de *cotree* de nível 3 que não seja completa.

Este resultado nos incentivou a estudar e tentar colorir as arestas dos cografos de *cotree* completa de nível 3 que não sejam O ou SO , para provar mais uma equivalência para a Conjectura de *Hilton* e *Chetwynd*. Os resultados e algoritmos obtidos serão mostrados no próximo capítulo.

Capítulo 6

Coloração de Arestas para Cografos $abcd$ que não são SO

Este capítulo se dedica a apresentar algoritmos para colorir alguns cografos de *cotree* completa de nível 3 que não são SO com Δ cores. Chamaremos estes de cografos de $abcd$.

Os algoritmos a serem apresentados são resultados inéditos obtidos durante os meses de pesquisa que antecederam este texto.

Assim como o resultado obtido por *D. G. Hoffman* e *C. A. Rodger*, nós pretendemos colorir um cografo G baseado na coloração de um grafo com número menor de vértices.

Este capítulo mostra alguns resultados para aqueles cografos com 2 elementos na α -partição.

6.1 Redução

Esta seção define uma subclasse dos cografos de *cotree* completa de nível 3 com dois ramos onde cada cografo G nesta subclasse pode ter seu número de arestas aumentado, gerando um outro cografo G' , de forma que o número de elementos da β -partição de cada ramo seja reduzido para dois e $\Delta(G') = \Delta(G)$. Em outras palavras, queremos definir cografos de *cotree* completa de nível 3 com dois ramos e com mais de dois elementos da β -partição em cada ramo que possam ter este número de elementos reduzido sem alterar seu Δ .

Uma Δ -coloração (se existir) para G' origina uma Δ -coloração para o grafo G desta subclasse.

Lema 8 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3. Então G é subgrafo de um cografo de cotree completa de nível 3 onde cada elemento da α -partição contém apenas dois elementos da β -partição.*

Prova: Seja r o número de elementos da α -partição de G e seja G' construído da seguinte forma:

- i. $V(G') = V(G)$ e
- ii. $A(G') = A(G) \cup \{(x, y), x \in \beta_G(i, j), y \in \beta_G(i, k), j \neq k, 2 \leq j, k \leq f_G(i), 1 \leq i \leq r\}$.

Em outras palavras, G' é construído a partir de G com o mesmo conjunto de vértices de G e com um conjunto de arestas que contém o conjunto de arestas de G . A diferença entre o conjunto de arestas de G' e G é dada por aquelas que unem os vértices de $\beta_G(i, 2) \cup \dots \cup \beta_G(i, k)$ que não estão unidos em G , ou seja, são construídas cliques de tamanho $b_G(i, 2) + \dots + b_G(i, k)$, para $1 \leq i \leq r$.

O grafo G' assim construído é um cografo de *cotree* completa de nível 3, onde cada $\alpha_{G'}(i)$ contém apenas dois elementos de sua β -partição e G é subgrafo de G' . \square

Lema 9 *Seja G cografo de cotree completa de nível 3 com 2 ramos e seja G' construído a partir de G conforme Lema 8. Então $p_G(1) \geq p_{G'}(1)$.*

Prova: Seja $|V(G)| = n$. Como G é subgrafo de G' , $\Delta(G) \leq \Delta(G')$. Logo, temos

$$n - p_G(1) - 1 \leq n - p_{G'}(1) - 1.$$

Portanto, $p_G(1) \geq p_{G'}(1)$. \square

Lema 10 *Seja G cografo de cotree completa de nível 3 com 2 ramos e seja G' construído a partir de G conforme Lema 8. Se $p_G(1) = p_{G'}(1)$, então G é um subgrafo de G' com $\Delta(G) = \Delta(G')$.*

Prova: Por definição, $\Delta(G) = n - p_G(1) - 1 = n - p_{G'}(1) - 1 = \Delta(G')$. \square

Os lemas a seguir dão condições sobre os elementos da β -partição de G que são suficientes para que G seja subgrafo de G' com $\Delta(G) = \Delta(G')$.

Lema 11 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3 com 2 ramos. Então*

$$p(1) \leq p(2) \Leftrightarrow \sum_{2 \leq j \leq f(1)} b(1, j) \leq \sum_{2 \leq k \leq f(2)} b(2, j).$$

A Figura 6.1 mostra um grafo G com $p_G(1) < p_G(2)$ e com $\alpha_{G'}(2) = \alpha_G(1)$ e $\alpha_{G'}(1) = \alpha_G(2)$. Além disso, $\Delta(G') > \Delta(G)$.

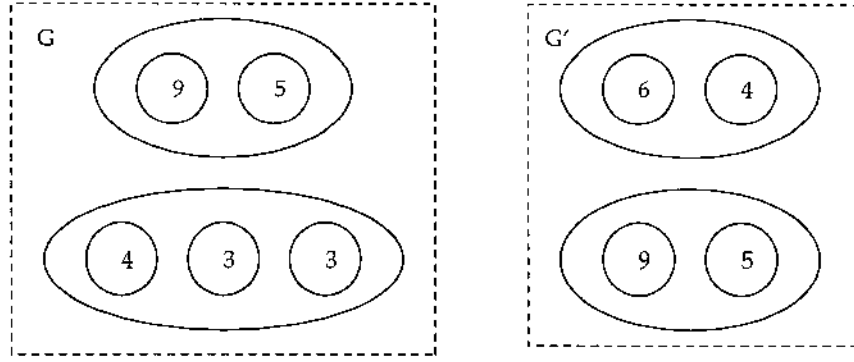


Figura 6.1: G possui $p_G(1) < p_G(2)$ mas $\alpha_{G'}(2) = \alpha_G(1)$ e $\alpha_{G'}(1) = \alpha_G(2)$.

Lema 12 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3 com 2 ramos. Se*

$$\sum_{2 \leq j \leq f(1)} b(1, j) \leq b(2, 1) \text{ e}$$

$$\sum_{2 \leq j \leq f(1)} b(1, j) \leq \sum_{2 \leq j \leq f(2)} b(2, j), \text{ então } \alpha_{G'}(1) = \alpha_G(1).$$

Prova: Consideremos G' com $b_G(1, 1) = a$ e $\sum_{2 \leq j \leq f(1)} b_G(1, j) = b$, $b_G(2, 1) = c$ e $\sum_{2 \leq j \leq f(2)} b_G(2, j) = d$.

Pela ordenação da α -partição de G , temos $p_G(1) = b$ e $p_G(2) = d$.

Por hipótese, $b \leq c$ e $b \leq d$, então $b \leq \min\{c, d\}$.

Em ambos os casos, $a \leq b$ e $a > b$, tem-se que

$$p_{G'}(1) = \min\{\min\{a, b\}, \min\{c, d\}\} \leq b = p_G(1).$$

Logo, podemos tomar $\alpha_{G'}(1) = \alpha_G(1)$. □

A Figura 6.2 mostra grafos G e G' com a mesma α -partição, mas que não possuem o mesmo grau máximo.

Corolário 6 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3 com 2 ramos. Se além das condições do Lema 12,*

$$\sum_{2 \leq j \leq f(1)} b(1, j) \leq b(1, 1),$$

então $p_{G'}(1) = p_G(1)$.

Prova: De fato, a ordenação dos elementos da α -partição de G' origina

$$\beta_{G'}(1, 1) = \beta_G(1, 1) \text{ e } \beta_{G'}(1, 2) = \bigcup_{2 \leq j \leq f_G(1)} \beta(1, j),$$

$$\beta_{G'}(2, 1) = \beta_G(2, 1) \text{ e } \beta_{G'}(2, 2) = \bigcup_{2 \leq j \leq f_G(2)} \beta(2, j).$$

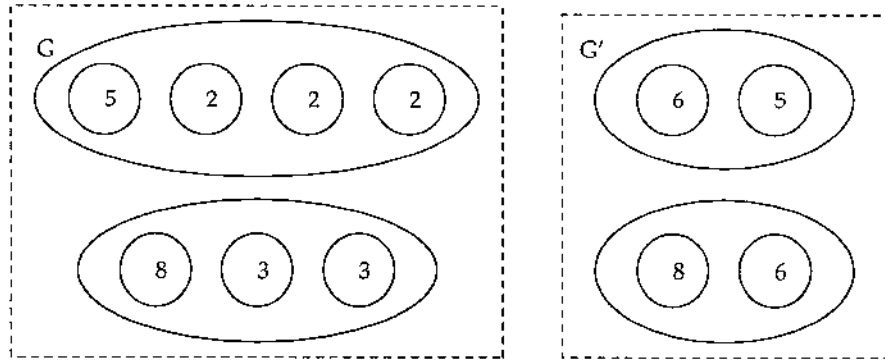


Figura 6.2: $\alpha(G) = \alpha(G')$ e $\Delta(G) < \Delta(G')$.

□

Seja G um cografo de *cotree* completa de nível 3 com 2 ramos satisfazendo as condições do Lema 12 e Corolário 6. Se $G \not\cong G'$, então G possui em cada elemento da α -partição no máximo um elemento $\beta_G(i, 1)$, com $1 \leq i \leq 2$, contendo Δ -vértices.

Corolário 7 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3 satisfazendo as condições do Lema 12 e Corolário 6. Se v é um Δ -vértice de G , então v é um Δ -vértice de G' .*

Prova: Pelo Lema 12, $\alpha_{G'}(1) = \alpha_G(1)$ e $\alpha_{G'}(2) = \alpha_G(2)$ e pelo Corolário 6, $p_{G'}(1) = p_G(1)$. Logo, pelo Lema 10, $\Delta(G') = \Delta(G)$.

Se $G \cong G'$, então um Δ -vértice de G é um Δ -vértice de G' .

Se $G \not\cong G'$ e v é um Δ -vértice de G , então $v \in \beta_G(1, 1)$ ou $v \in \beta_G(2, 1)$. Sendo que $\beta_{G'}(i, 1) = \beta_G(i, 1)$, $1 \leq i \leq 2$, temos que v é Δ -vértice de G' . □

O Corolário 7 diz que o conjunto dos Δ -vértices de G está contido no conjunto dos Δ -vértices de G' . A Figura 6.3 ilustra o corolário.

Lema 13 *Seja G um cografo de cotree completa de nível 3 satisfazendo as condições do Lema 12 e do Corolário 6. Se G' não é SO, então G não é SO.*

Prova: Pelo Teorema 15, sabemos que um cografo de *cotree* completa de nível 3 é SO se e somente se é O ou NO e, do Lema 10, temos que G é subgrafo de G' com $\Delta(G) = \Delta(G')$.

Assim sendo, uma vez que $V(G) = V(G')$ e $A(G) \subseteq A(G')$, se G é O, então G' é O.

Suponha G NO e seja v um Δ -vértice de G tal que $N_G[v]$ é *overfull*. Pelo Corolário 7, sabemos que v é Δ -vértice de G' . Ainda, $|N_G[v]| = |N_{G'}[v]|$, $\Delta(G) = \Delta(G')$ e $|A(G'[N_{G'}[v]])| \geq |A(G[N_G[v]])|$. Logo $G'[N_{G'}[v]]$ também é *overfull*. Portanto G' é NO. □

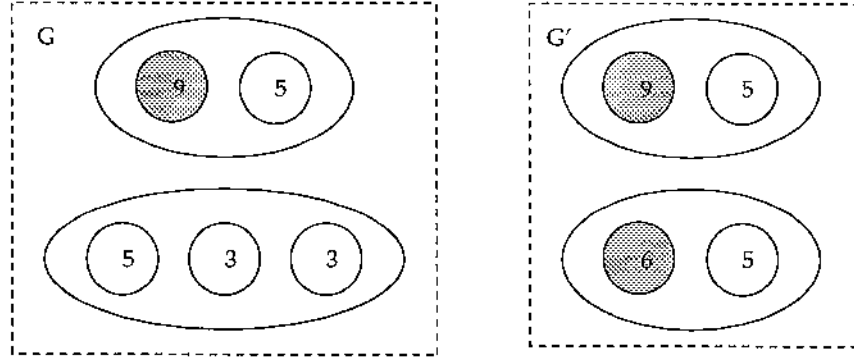


Figura 6.3: Os conjuntos hachurados contém os Δ -vértices de G e de G' .

Seja G um cografo de *cotree* completa de nível 3 com 2 ramos $\alpha(1)$, $\alpha(2)$ e 4 elementos na β -partição satisfazendo as condições do Lema 12 e Corolário 6: $\beta(1, 1)$, $\beta(1, 2)$, $\beta(2, 1)$ e $\beta(2, 2)$. Considere $b(1, 1) = a$, $b(1, 2) = b$, $b(2, 1) = c$ e $b(2, 2) = d$. Então, $a \geq b$, $c \geq b$ e $d \geq b$. Vamos denotar G por $abcd$.

O Lema 13 nos garante que se pintarmos as arestas de G com $\Delta(G)$ cores, obteremos uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores para cografos de *cotree* completa de nível 3 com 2 ramos que satisfazem as condições do Lema 12 e Corolário 6.

Lema 14 *Seja G um cografo $abcd$. Então G é SO se e somente se $\Delta(G) > ab + 2cd - b(b + c + d)$ ou $\Delta(G) > 2cd$.*

Prova: G é cografo de *cotree* completa de nível 3, portanto, pelo Teorema 15 (Capítulo 5 e [1]), temos que G é SO se e somente se é O ou NO.

O cografo G tem $|V(G)| = a + b + c + d$, $\Delta(G) = a + c + d - 1$. Assim sendo, pelo Lema 4 (Capítulo 5 e [1]), G é *overfull* se e somente se $2ab + 2cd < (a + b + c + d - 1)(1 + b)$, que resulta em $a + c + d - 1 > ab + 2cd - b(b + c + d)$. Ou seja,

$$\Delta(G) > ab + 2cd - b(b + c + d).$$

Sem perda de generalidade, suponha $c \geq d$.

Se G é NO, devemos contar as arestas da vizinhança de algum Δ -vértice. Se $p(1) < p(2)$, esta vizinhança será gerada por $V(G) \setminus \beta(1, 2)$, pois nenhum vértice de $\beta(1, 2)$ seria adjacente a um Δ -vértice, portanto, não faria parte de um possível subgrafo próprio induzido e *overfull* de G ([18]). Seja $H = G[V(G) \setminus \beta(1, 2)]$. Assim sendo $\Delta(H) = a + c + d - 1$ e $|V(H)| = a + c + d$. Para H ser *overfull*, teremos $a(a + c + d - 1) + c(a + c - 1) + d(a + d - 1) > (a + c + d - 1)(a + c + d - 1)$, que resulta em $a + c + d - 1 > 2cd$. Portanto,

$$\Delta(G) > 2cd.$$

Se $p(1) = p(2)$, sem perda de generalidade, suponha que $\alpha(1)$ é aquele elemento da α -partição que possui mais vértices e que $\alpha(2)$ é aquele que possui menos. Basta verificar o subgrafo gerado pela vizinhança dos Δ -vértices em $\beta(1, 1)$.

Assim $H = G[V(G) \setminus \beta(1, 2)]$. Em outras palavras, novamente tempos que H é *overfull* se e somente se

$$\Delta(G) > 2cd.$$

□

6.2 Coloração ideal

Seja G um cografo da forma $abcd$, com $a \geq b$, $c \geq b$ e $d \geq b$.

Dizemos que uma cor t está *livre* no vértice v se não existir aresta incidente a v colorida com a cor t .

Nossa idéia para colorir um cografo $abcd$ se baseia na coloração de $ab(c-1)d$, da seguinte forma:

1. colorimos $ab(c-1)d$ com $\Delta(abcd)$ cores, ou seja, $a + c + d - 1$ cores, uma a mais que o necessário para obtermos uma coloração ótima para $ab(c-1)d$;
2. acrescentamos o vértice z em $\beta_{ab(c-1)d}(2, 1)$;
3. colorimos as arestas que saem de z e vão para os a vértices de $\beta(1, 1)$, para os b vértices de $\beta(1, 1)$ e para os $c-1$ vértices de $\beta_{ab(c-1)d}(2, 1)$ com as cores livres nos a , b , $c-1$ vértices das cliques correspondentes.

Veja a Figura 6.4. Queremos colorir 3245 e começamos a colorir 3235 com 11 cores. Depois, colorimos as arestas do tipo (x, z) com $x \in \alpha(1) \cup \beta(2, 1)$ em 3235 com uma das cores livres em cada vértice de 3235. A Figura 6.5 mostra esta construção.

Dizemos que temos uma *situação ideal* quando, após os Passos 1 e 2 existem cores livres nos $a + b + c - 1$ vértices das cliques correspondentes que são distintas duas a duas e suficientes para colorir as arestas que surgem com a inclusão do vértice z (Passo 3).

Uma vez que estaremos preocupados com número de cores diferentes para colorir as arestas que incidem em z , consideraremos $c \leq d$, para o número de cores a ser procurado sempre ser o menor possível. No exemplo na Figura 6.5, para pintar o cografo 3245 usamos o cografo 3235, pois neste, teríamos que procurar 8 cores diferentes; poderíamos ter usado o cografo 3244 para colorir o cografo 3254 (isomorfo a 3245), mas neste teríamos que procurar 9 cores diferentes. Portanto, considerar $c \leq d$ (ou, simplesmente, escolher o mínimo entre $\beta(2, 1)$ e $\beta(2, 2)$ para ser c) resulta em redução de trabalho.

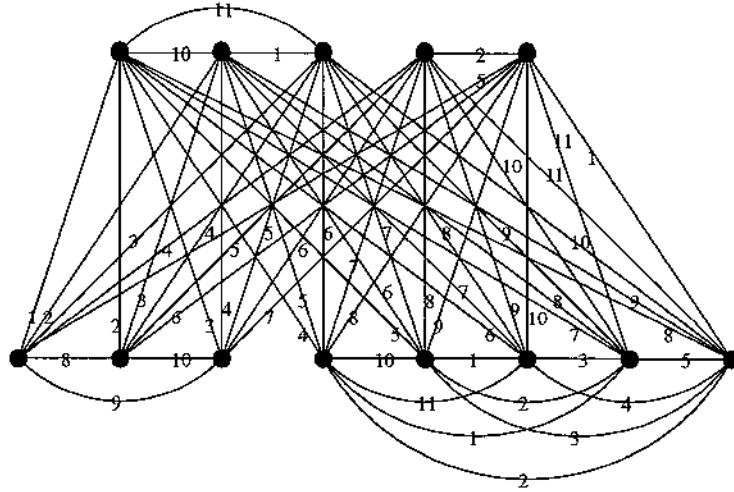


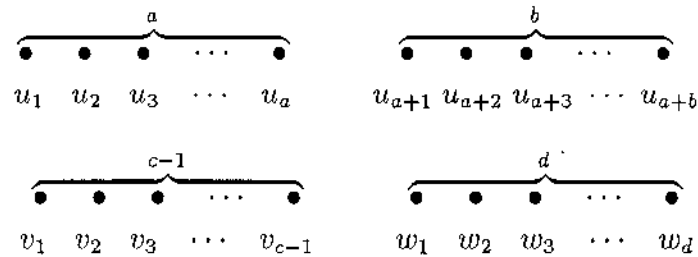
Figura 6.4: Uma coloração para β_{235} com $\Delta(3245) = 11$ cores.

6.2.1 Coloração do Bipartido $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$

Sejam $G = abcd$ e $H = ab(c-1)d$, organize os vértices de H da seguinte forma:

1. organize duas fileiras horizontais;
2. na fileira superior distribua os a vértices de $\beta_H(1,1)$ e os b vértices de $\beta_H(1,2)$. Chame cada vértice de u_i , onde i representa uma numeração da esquerda para a direita ($1 \leq i \leq a+b$).
3. na fileira inferior distribua os $c-1$ vértices de $\beta_H(2,1)$ e os d vértices de $\beta_H(2,2)$. Chame os vértices de $\beta_H(2,1)$ de v_j e os vértices de $\beta_H(2,2)$ de w_k , com $1 \leq j \leq c-1$ e $1 \leq k \leq d$.

Veja o esquema abaixo.



Pinte as arestas do grafo bipartido completo $B = B(\alpha_H(1), \alpha_H(2))$ gerado pelas duas fileiras definidas acima com $\Delta(G)$ cores, da seguinte forma: (Substitua a cor 0 por $\Delta(G)$.)

- Pinte as arestas (u_i, v_j) com a cor $(i + j - 1) \bmod \Delta(G)$, para $1 \leq i \leq a+b$ e $1 \leq j \leq c-1$;

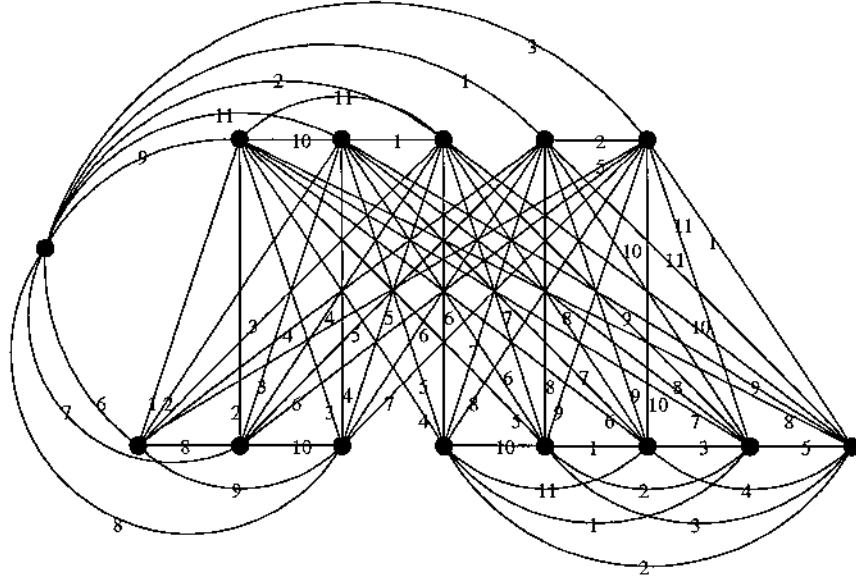


Figura 6.5: Coloração para 32/5.

- Pinte as arestas (u_i, w_k) com a cor $(i + (k + c - 1) - 1) \bmod \Delta(G)$, para $1 \leq i \leq a + b$ e $1 \leq k \leq d$.

Cada u_i , para $1 \leq i \leq a + b$, tem grau $c + d - 1$ em B e foram usadas $\Delta(G) = c + d + a - 1$ cores, ou seja, existem a cores dentre as $\Delta(G)$ usadas que estão livres em cada u_i . Assim, construiremos uma matriz de cores livres nos vértices de $\beta(1, 1)$ e $\beta(1, 2)$. Chamaremos estas matrizes de $L(a)$ e $L(b)$, respectivamente. Estas matrizes, da forma como colorimos B , contém as seguintes cores:

$$L(a) = \begin{pmatrix} c + d & c + d + 1 & \cdots & \Delta(G) - 1 & \Delta(G) \\ c + d + 1 & c + d + 2 & \cdots & \Delta(G) & 1 \\ c + d + 2 & \vdots & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \Delta(G) - 1 & \cdots & 2 & \vdots \\ \Delta(G) - 1 & \Delta(G) & \cdots & \vdots & a - 2 \\ \Delta(G) & 1 & \cdots & a - 2 & a - 1 \end{pmatrix}$$

$$L(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & b-1 & b \\ 2 & 3 & \cdots & b & b+1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b+1 & \cdots & 2b-2 & 2b-1 \\ b+1 & b+2 & \cdots & 2b-1 & 2b \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a-1 & a & \cdots & a+b-3 & a+b-2 \\ a & a+1 & \cdots & a+b-2 & a+b-1 \end{pmatrix}.$$

Cada v_j e w_k , para $1 \leq j \leq c-1$ e $1 \leq k \leq d$, tem grau $a+b$ em B , ou seja, existem $c+d-b-1$ cores dentre as $\Delta(G)$ usadas que ainda estão livres nestes vértices. Assim, definiremos outras matrizes de cores livres em $\beta(2,1)$ e $\beta(2,2)$, $L(c-1)$ e $L(d)$, respectivamente.

$$L(c-1) = \begin{pmatrix} a+b+1 & a+b+2 & a+b+3 & \cdots & a+b+c-1 \\ a+b+2 & \vdots & \vdots & \cdots & a+b+c \\ \vdots & \Delta(G)-1 & \Delta(G) & \cdots & \vdots \\ \Delta(G)-1 & \Delta(G) & 1 & \cdots & c-3 \\ \Delta(G) & 1 & 2 & \cdots & c-2 \end{pmatrix}$$

$$L(d) = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c+1 & \cdots & b-1 & b \\ \vdots & \vdots & \cdots & b & b+1 \\ c-3 & c-2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ c-2 & c-1 & \cdots & c+d-4 & c+d-3 \\ c-1 & c & \cdots & c+d-3 & c+d-2 \end{pmatrix}$$

Observação 1 A matriz $L(a)$ tem dimensão $a \times a$, $L(b)$ é $a \times b$, $L(c-1)$ é $(c+d-b-1) \times (c-1)$ e $L(d)$ é $(c+d-b-1) \times d$.

6.2.2 Coloração das Cliques de $\alpha_H(1)$ e de $\alpha_H(2)$

Para colorir as cliques geradas pelos quatro elementos da β -partição, usaremos $L(a)$, $L(b)$, $L(c-1)$ e $L(d)$.

Chamaremos de **Alcance** de uma aresta (r_i, s_j) à soma $j-i+1$. Uma cor t “**forma diagonal**” se, em uma matriz de cores livres, os elementos de uma diagonal (no sentido inferior esquerdo para o superior direito) forem iguais a t . O **tamanho** de uma diagonal é o número de elementos da diagonal.

O algoritmo que apresentamos tem como objetivo aproveitar as cores que estão livres em algum conjunto de vértices para colorir as arestas que formam uma clique neste conjunto. O algoritmo será usado, então, para colorir as cliques geradas por $\beta(i,j)$, para

$1 \leq i, j \leq 2$. Seja K_p uma clique com p vértices e M uma matriz quadrada $p \times p$. Suponha $Q > p$ e $1 \leq x \leq Q$, M é construída da seguinte:

- i. A primeira coluna de M é formada por $x \bmod Q, (x+1) \bmod Q, \dots, (x+p-1) \bmod Q$;
- ii. A segunda coluna de M é formada por $(x+1) \bmod Q, (x+2) \bmod Q, \dots, (x+p) \bmod Q$;
- iii. A s -ésima coluna de M é formada por $(x+s-1) \bmod Q, (x+s) \bmod Q, \dots, (x+s+p-2) \bmod Q$;

Dessa forma, podemos considerar uma *rotação* (“*shift*”) de um elemento de uma coluna para a anterior sobre o valor máximo Q .

Usando a matriz M e uma clique de tamanho p , definimos o seguinte algoritmo:

Algoritmo Pinta Clique (K_p, M)

```

 $D \leftarrow p$ ;
Enquanto  $D \geq 2$  faça
     $N \leftarrow$  número de arestas de alcance  $D$ ;
    Enquanto  $N \geq 1$  faça
        Procure as cores que formam diagonal de tamanho  $D$  em  $M$ ;
        Escolha a menor delas; digamos,  $t$ ;
        Pinte a aresta formada pelas extremidades desta diagonal com a cor  $t$ ;
        Retire (marque para não ser mais usada) a cor  $t$  das colunas que
            são extremidades desta diagonal;
         $N \leftarrow N - 1$ ;
    Fim { Enquanto }
     $D \leftarrow D - 1$ ;
Fim { Enquanto }
Se  $x = 9$ ,  $Q = 12$  e  $p = 4$  temos (substituindo a cor 0 por  $Q$ )

```

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 1 \\ 11 & 12 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A Figura 6.6 mostra o resultado de Pinta Clique(K_4, M).

Teorema 16 *Seja K_p uma clique com p vértices e M uma matriz $p \times p$ construída conforme mencionado anteriormente. Então o algoritmo Pinta Clique (K_p, M) origina uma coloração válida para K_p com as cores em M .*

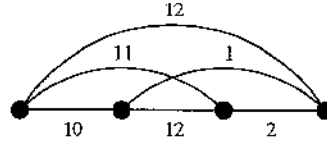


Figura 6.6: Clique de tamanho 4 pintada usando o Algoritmo Pinta Clique e a matriz M .

Prova: Mostraremos, por indução em p , que o algoritmo Pinta Clique (K_p, M) atribui a cada aresta de K_p uma cor comum em duas colunas de M .

1. **Base:** $p = 2$. Dessa forma D é somente 2.

$$M = \begin{pmatrix} x \bmod Q & (x+1) \bmod Q \\ (x+1) \bmod Q & (x+2) \bmod Q \end{pmatrix}$$

Usaremos a cor $(x+1) \bmod Q$ para colorir a aresta de K_2 .

2. **Hipótese de Indução:** Suponha que, usando o algoritmo “Pinta Clique”, colorimos uma clique de tamanho $p-1$ (K_{p-1}) com $M_{(p-1) \times (p-1)}$. (As cores sublinhadas já foram usadas. O valor de D decresceu de $p-1$ até 2.)

$$M = \begin{pmatrix} x \bmod Q & (x+1) \bmod Q & \cdots & (x+p-2) \bmod Q \\ \underline{(x+1) \bmod Q} & \underline{(x+2) \bmod Q} & \cdots & \underline{(x+p-1) \bmod Q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (x+p-3) \bmod Q & (x+p-2) \bmod Q & \cdots & (x+2p-5) \bmod Q \\ \underline{(x+p-2) \bmod Q} & \underline{(x+p-1) \bmod Q} & \cdots & \underline{(x+2p-4) \bmod Q} \end{pmatrix}$$

3. **Passo:** Coloração para K_p usando M uma matriz $p \times p$.

Na verdade, temos que K_p é igual a K_{p-1} com a inclusão de um vértice y_p e de mais $p-1$ arestas, que ligam este novo vértice aos outros $p-1$ já existentes. Assim sendo, devemos colorir somente estas arestas: $(y_1, y_p), (y_2, y_p), \dots, (y_{p-1}, y_p)$. Em M temos mais uma linha e mais uma coluna:

$$\begin{pmatrix} x \bmod Q & (x+1) \bmod Q & \cdots & (x+p-2) \bmod Q & (x+p-1) \bmod Q \\ \underline{(x+1) \bmod Q} & \underline{(x+2) \bmod Q} & \cdots & \underline{(x+p-1) \bmod Q} & (x+p) \bmod Q \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ (x+p-3) \bmod Q & (x+p-2) \bmod Q & \cdots & (x+2p-5) \bmod Q & (x+2p-4) \bmod Q \\ \underline{(x+p-2) \bmod Q} & \underline{(x+p-1) \bmod Q} & \cdots & \underline{(x+2p-4) \bmod Q} & (x+2p-3) \bmod Q \\ (x+p-1) \bmod Q & (x+p) \bmod Q & \cdots & (x+2p-3) \bmod Q & (x+2p-2) \bmod Q \end{pmatrix}$$

Nossa coloração (seguindo o algoritmo Pinta Clique) é

- Com $D = p$, temos a aresta (y_1, y_p) , que podemos pintar com a cor $(x+p-1) \bmod Q$;
- Com $D = p-1$, temos a nova aresta (y_2, y_p) e as outras que, por hipótese de indução, já foram coloridas. Para (y_1, y_{p-1}) podemos usar a cor $(x+p) \bmod Q$;

- ...;
- Com $D = 2$, temos a nova aresta (y_{p-1}, y_p) e as outra que, por hipótese de indução já foram coloridas. Para (y_{p-1}, y_p) podemos usar a cor $(x + 2p - 3) \bmod Q$.

Ou seja, pintamos a aresta (y_i, y_p) com a cor $(x + p - 2 + i) \bmod Q$ e as demais com o mesmo alcance já foram coloridas por hipótese de indução, para $1 \leq i \leq p - 1$.

Assim sendo, colorimos as arestas de K_p usando a matriz M com dimensão $p \times p$.

Disponha os vértices de K_p em uma linha e sejam y_i, y_j e $y_k \in V(K_p)$. Sendo (y_i, y_j) , (y_i, y_k) duas arestas distintas e incidentes a um mesmo vértice em K_p , possuem alcances distintos. Suponha $j < k$.

Assim, o algoritmo em K_p pinta primeiro a aresta (y_i, y_k) (a de maior alcance) com a cor t da diagonal de tamanho máximo da matriz M . A seguir, retira das colunas de y_i e de y_k a cor t . Logo, t não poderá ser usada para pintar (y_i, y_j) uma vez que as diagonais que iniciam na coluna y_i possuem cores distintas. \square

Observe que sobra uma cor em cada coluna de M após usado o algoritmo “Pinta Clique”, pois este usa sempre $p - 1$ linhas dentre as p existentes.

Aqui teremos uma *situação ideal* quando pintamos as arestas das cliques geradas pelos β -elementos de H usando o algoritmo “Pinta Clique” e ainda existem cores livres diferentes que sejam suficientes para colorir as arestas do tipo (z, x) , onde z é o único vértice de $V(G) \setminus V(H)$ e x pertence a $\alpha(1) \cup \beta(2, 1)$.

Vamos escolher entradas adequadas para o do algoritmo “Pinta Clique” dentre as matrizes de cores livres dos elementos da β -partição de H para chegarmos a uma situação ideal. Mais precisamente, traçaremos condições sobre as matrizes e as variáveis do problema para que tenhamos uma situação ideal.

Corolário 8 *Se $c \geq b + 1$, as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$ geram submatrizes quadradas $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ que são suficientes para colorir as cliques geradas pelos vértices de $\beta(1, 1)$, $\beta(1, 2)$, $\beta(2, 1)$ e $\beta(2, 2)$ usando o algoritmo “Pinta Cliques”.*

Prova: Da Observação 1 temos que $L(a)$ tem dimensão $a \times a$, $L(b)$ é $a \times b$, $L(c - 1)$ é $(c + d - b - 1) \times (c - 1)$ e $L(d)$ é $(c + d - b - 1) \times d$. Assim sendo,

- i. Crie $L'(b)$ selecionando b linhas consecutivas de $L(b)$;
- ii. Crie $L'(c - 1)$ selecionando $(c - 1)$ linhas consecutivas de $L(c - 1)$;
- iii. Crie $L'(d)$ selecionando d linhas consecutivas de $L(d)$.

Em outras palavras, queremos matrizes quadradas. Sendo $a \geq b$, é possível construir $L'(b)$ quadrada. Como $d \geq b$, então $c + d - b - 1 \geq c - 1$. Logo é possível selecionar $c - 1$ linhas e construir $L'(c - 1)$ também quadrada. Ainda, sendo $c \geq b + 1$, tem-se que $c + d - b - 1 \geq d$, e podemos construir $L'(d)$. Como $L(a)$ já é quadrada, faça $L'(a) = L(a)$.

Usaremos, agora, o algoritmo “Pinta Clique” para colorir as arestas de H que ainda não foram pintadas.

Algoritmo “Pinta Cliques de H ”

Pinta Clique($G[\beta(1, 1)]$, $L'(a)$);
 Pinta Clique($G[\beta(1, 2)]$, $L'(b)$);
 Pinta Clique($G[\beta(2, 1)]$, $L'(c - 1)$);
 Pinta Clique($G[\beta(2, 2)]$, $L'(d)$).

Segundo o Teorema 16, conseguimos pintar as cliques $G[\beta(1, 1)]$, $G[\beta(1, 2)]$, $G[\beta(2, 1)]$ e $G[\beta(2, 2)]$ com as matrizes $L'(a)$, $L'(b - 1)$, $L'(c)$ e $L'(d)$, respectivamente. \square

Corolário 9 *Se $c = b$ e $d \geq b + 1$, as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$ geram submatrizes quadradas $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ que são suficientes para colorir as cliques geradas pelos vértices de $\beta(1, 1)$, $\beta(1, 2)$, $\beta(2, 1)$ e $\beta(2, 2)$ usando o algoritmo “Pinta Cliques”.*

Prova: Aplique o Corolário 8 para $G' = abdc$. \square

Corolário 10 *Se $c = d = b$ e $a \geq b + 1$, as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$ geram submatrizes quadradas $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ que são suficientes para colorir as cliques geradas pelos vértices de $\beta(1, 1)$, $\beta(1, 2)$, $\beta(2, 1)$ e $\beta(2, 2)$ usando o algoritmo “Pinta Cliques”.*

Prova: Aplique o Corolário 8 para $G' = cdab$. \square

As matrizes $L'(x)$ para $x \in \{a, b, c - 1, d\}$ são sempre quadradas, portanto, sobra uma cor em cada coluna. Mais precisamente, esta cor livre pertence à posição (i, i) , $1 \leq i \leq x$. Chamaremos estas cores de $I(x)$. Em outras palavras, $I(x)$ é uma seqüência de cores livres em $L'(x)$ (quadrada) após usado o algoritmo “Pinta Clique”.

Observe que para $G = aaaa$ o Corolário 8 não pode ser aplicado. Estes grafos foram pintados de forma diferente como mostraremos na Seção 6.2.8 (Corolário 15).

As próximas seções colorem alguns cografos $abcd$ com $a > b$ que não são SO , usando os algoritmo mostrados nas Seções 6.2.1 e 6.2.2.

6.2.3 Cografos $abcd$ com $a > b$ e $a(1) \leq a(2)$

Seja $G = abcd$ com $a \geq b$, $c \geq b + 1$, $d \geq c$ e $H = ab(c - 1)d$.

Consideremos que $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$ já está com suas arestas coloridas. Usamos o algoritmo da Seção 6.2.1.

Nesta seção, selecionaremos linhas de $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$ para construir $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ de forma a alcançar o objetivo de *traçar condições para uma situação ideal*.

Este objetivo definirá os cografos $abcd$ que poderão ser pintados em uma situação ideal: aqueles que possuem $c + d \geq a + b$, $c \geq b + 1$ e $a > b$.

Para se chegar a uma situação ideal, considere a construção abaixo. Além de $L'(a) = L(a)$, faça:

- i. Suponha $a > b$ e construa $L'(b)$ usando as b primeiras linhas de $L(b)$.
- ii. Construa $L'(c - 1)$ da seguinte forma:

Se $a + b \equiv (c + d) \pmod{2}$, selecione as $c - 1$ primeiras linhas consecutivas de $L(c - 1)$;

Caso contrário, selecione as $c - 1$ linhas consecutivas de $L(c - 1)$ a partir da segunda linha;
- iii. Construa $L'(d)$ usando d últimas linhas consecutivas de $L(d)$. Conseguimos d linhas consecutivas de $L(d)$ pois $c \geq b + 1$.

Esta construção deixa pelo menos a última linha de $L(b)$ sem ser usada ($a > b$). Além disso, usando Pinta Clique ($G[\beta(1, 1)]$, $L'(a)$), Pinta Clique ($G[\beta(1, 2)]$, $L'(b)$) e Pinta Clique ($G[\beta(2, 1)]$, $L'(c - 1)$) e considerando U a última linha de $L(b)$, teremos

- $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, (c + d + 2(i - 1) \pmod{\Delta(G)}, \dots, a - 3, a - 1\}$;
- $U = \{a, a + 1, \dots, a + b - 1\}$.
- $I(c - 1) =$
 - $\{a + b + 1, a + b + 3, \dots, (a + b + 2c - 3) \pmod{\Delta(G)}\}$ para $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$;
 - ou
 - $\{a + b + 2, a + b + 4, \dots, (a + b + 2c - 2) \pmod{\Delta(G)}\}$ para $(a + b) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$.

Novamente, se todas as cores selecionadas forem diferentes e tiverem cardinalidade igual ao grau do vértice a ser inserido z , conseguiremos chegar a esta situação ideal, pois conseguiremos pintar as arestas incidentes a este novo vértice de forma a preservar a coloração válida que já existia em H .

Como exemplo, tome o cografo $G = 4345$. Usaremos, inicialmente, a coloração de $H = 4335$. Após pintarmos as arestas de $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$, teremos as seguintes matrizes: (as linhas delimitadas por “[” e “]” são para as respectivas matrizes L' .)

$$L(a) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{9} & 10 & 11 & 12 \\ 10 & \mathbf{11} & 12 & 1 \\ 11 & 12 & \mathbf{1} & 2 \\ 12 & 1 & 2 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \right), L(b) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right),$$

$$L(c-1) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{8} & 9 & 10 \\ 9 & \mathbf{10} & 11 \\ 10 & 11 & \mathbf{12} \\ 11 & 12 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \text{ e } L(d) = \left(\begin{bmatrix} 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

Assim, temos $I(a) = \{9, 11, 1, 3\}$, $U = \{4, 5, 6\}$ e $I(c-1) = \{8, 10, 12\}$.

Lema 15 *Se $a \leq c + d$, então as cores de $I(a)$ são diferentes duas a duas.*

Prova: De acordo com a paridade de $c + d$, $\Delta(G)$ e a , podemos ter os seguintes casos.

- Se $(c + d) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$,
 $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, \Delta(G), 2, \dots, a - 3, a - 1\}$;

Se $(c + d) \equiv (a - 1) \pmod{2}$, os elementos das duas subsequências crescentes de cores $\{c + d, \dots, \Delta(G)\}$ e $\{2, \dots, a - 1\}$ possuem a mesma paridade, mas como $a \leq c + d$, temos que $(a - 1) < c + d$, fazendo com que todos elementos de $I(a)$ sejam dois a dois distintos.

Caso contrário, as duas subsequências crescentes possuem elementos de paridades diferentes. O máximo que pode acontecer, no caso de $a - 1$ “crescer muito”, é as duas subsequências se intercalarem em alguma parte.

- Se $(c + d) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$,
 $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, \Delta(G) - 1, 1, \dots, a - 3, a - 1\}$

Se $(c + d) \equiv (a - 1) \pmod{2}$, novamente, as duas subsequências crescentes de cores $\{c + d, \dots, \Delta(G) - 1\}$ e $\{1, \dots, a - 1\}$ possuem elementos de mesma paridade, mas como $a \leq c + d$, temos que $(a - 1) < c + d$, fazendo com que todos elementos de $I(a)$ sejam dois a dois distintos.

Caso contrário, as duas subsequências crescentes possuem elementos de paridades diferentes. O máximo que pode acontecer, no caso de $a - 1$ “crescer muito”, é as duas subsequências se intercalarem em alguma parte.

Assim sendo, com $a \leq c + d$ as cores de $I(a)$ são sempre duas a duas diferentes. \square

Observe que se $(a - 1) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$, as cores de $I(a)$ são duas a duas distintas para qualquer a .

Em relação a escolha feita para $I(c - 1)$, temos uma intercalação com as cores de $I(a)$.

Lema 16 *As cores de $I(c - 1)$ são sempre diferentes duas a duas.*

Prova: Para $I(c - 1)$ teremos

- Se $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$,

$$I(c - 1) = \{a + b + 1, a + b + 3, \dots, (a + b + 2c - 3) \pmod{\Delta(G)}\};$$

Quando $(a + b + 2c - 3) \leq \Delta(G)$, $I(c - 1)$ é uma seqüência crescente (uma progressão aritmética de razão 2). Portanto, os elementos são diferentes.

Quando $(a + b + 2c - 3) > \Delta(G)$ e

- Se $(c + d) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$, então $(a + b + 1) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$. Portanto, $I(c - 1)$ é formado por duas subseqüências crescentes (duas PAs de razão 2): uma de $(a + b + 1)$ até $(\Delta(G) - 1)$ e outra de 1 até $b + c - d - 2$. Se as duas subseqüências possuem elementos de mesma paridade temos de nos preocupar em verificar se $b + c - d - 2$ é menor que $a + b + 1$. Esta desigualdade nos leva a $c - d - 2 \leq a$ que é sempre verdadeiro, pois $c \leq d$. Ou seja, mesmo quando as duas subseqüências possuem elementos de mesma paridade, não há elementos iguais nas duas subseqüências. Quando as duas subseqüências possuem elementos de paridades diferentes o máximo que pode acontecer é uma intercalação.
- Se $(c + d) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$, então $(a + b + 1) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$. Portanto, $I(c - 1)$ possui duas subseqüências crescentes (duas PAs de razão 2): uma de $(a + b + 1)$ até $\Delta(G)$ e outra de 2 até $b + c - d - 2$. Sendo subseqüências de paridades diferentes, as cores de $I(c - 1)$ são duas a duas distintas.

- Se $(a + b) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$,

$$I(c - 1) = \{a + b + 2, a + b + 4, \dots, (a + b + 2c - 2) \pmod{\Delta(G)}\};$$

Quando $(a + b + 2c - 2) \leq \Delta(G)$, $I(c - 1)$ é uma seqüência crescente (uma progressão aritmética de razão 2). Portanto, os elementos são diferentes.

Quando $(a + b + 2c - 2) > \Delta(G)$ e

- Se $(c + d) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$, então $(a + b + 2) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$. Portanto, $I(c - 1)$ é formado por duas subseqüências crescentes (duas PAs de razão 2):

uma de $(a + b + 1)$ até $(\Delta(G) - 1)$ e outra de 1 até $b + c - d - 1$. Se as duas subseqüências possuem elementos de mesma paridade temos de nos preocupar em verificar se $b + c - d - 1$ é menor que $a + b + 1$. Esta desigualdade nos leva a $c - d - 1 \leq a$ que, novamente, é sempre verdadeiro. Ou seja, mesmo quando as duas subseqüências possuem elementos de mesma paridade, não há um elemento igual nas duas subseqüências. Quando as duas subseqüências possuem elementos de paridades diferentes o máximo que pode acontecer é uma intercalação.

- Se $(c + d) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$, então $(a + b + 2) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$. Portanto, $I(c - 1)$ tem duas subseqüências (duas PAs de razão 2): uma de $(a + b + 1)$ até $\Delta(G)$ e outra de 2 até $b + c - d - 1$. Pelo mesmo motivo mostrado do parágrafo anterior as cores de $I(c - 1)$ são duas a duas distintas.

Assim sendo, não há possibilidade de $I(c - 1)$ possuir cores repetidas. \square

Vejamos, agora, se a escolha de cores para $I(a)$ e $I(c - 1)$ deixa cores diferentes duas a duas.

Lema 17 *Se $a \leq c + d$, então as cores de $I(a)$ e de $I(c - 1)$ são diferentes duas a duas.*

Prova: Como $a \leq c + d$, pelo Lema 15, temos que as cores de $I(a)$ são diferentes duas a duas. Pelo Lema 16, as cores de $I(c - 1)$ são sempre diferentes duas a duas.

Resta verificar se existe cor em $I(a)$ que está em $I(c - 1)$ e vice-versa.

Tanto $I(a)$ quanto $I(c - 1)$ possui números crescentes limitados por $\Delta(G)$.

- Quando $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$ e
 - Se $(c + d) \equiv \Delta(G) \pmod{2}$, temos

$$I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, \Delta(G), 2, \dots, a - 1\}$$
 e

$$I(c - 1) = \{a + b + 1, a + b + d, \dots, \Delta(G) - 1, 1, 3, \dots, (a + b + 2c - 3) \pmod{\Delta(G)}\}.$$
 - Se $(c + d) \not\equiv \Delta(G) \pmod{2}$, temos

$$I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, \Delta(G) - 1, 1, \dots, a - 1\}$$
 e

$$I(c - 1) = \{a + b + 1, a + b + d, \dots, \Delta(G), 2, 4, \dots, (a + b + 2c - 2) \pmod{\Delta(G)}\}.$$

Em ambos os casos, as cores da primeira subseqüência de $I(a)$ e $I(c - 1)$ e as cores da segunda subseqüência de $I(a)$ e $I(c - 1)$ são 2 a 2 distintas por terem paridades diferentes.

- Se $(a + b) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$, com um raciocínio análogo ao anterior, também encontramos paridades diferentes entre as subseqüências de $I(a)$ e as subseqüências de $I(c - 1)$.

Devemos nos preocupar, somente, quando a segunda subsequência de $I(a)$ possui elementos de mesma paridade dos elementos da primeira subsequência de $I(c-1)$ ou primeira subsequência de $I(a)$ possui elementos de mesma paridade dos elementos da segunda subsequência de $I(c-d)$. No primeiro caso, $a-1 < a+b+1$, portanto, não existem elementos repetidos. No segundo caso $c-d-1 < c+d$ (ou $c-d-2 < c+d$), uma desigualdade sempre verdadeira.

Logo, se $a \leq c+d$ as cores em $I(a)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas. \square

Lema 18 *Se $a > b$ e $a+b \leq c+d$, então as cores de $I(a)$, $I(b)$ e $I(c-1)$ são diferentes duas a duas.*

Prova: Se $a+b \leq c+d$, então $a \leq c+d$. Portanto, pelo Lema 17, as cores de $I(a)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas.

Resta verificar se os elementos de $I(b)$ são diferentes dos elementos de $I(a)$ e dos elementos de $I(c-1)$.

Como $a+b \leq c+d$, o último elemento da sequência crescente U , $a+b-1 < c+d$. Além disso, $a > a-1$. Portanto, as cores de $I(b)$ e de $I(a)$ são duas a duas diferentes.

O último elemento de $I(b)$ é menor que o primeiro de $I(c-1)$ pois $a+b-1 < a+b+1$. Se o último elemento de $I(c-1)$ é maior que $\Delta(G)$, teremos no máximo $b+c-d-1$. Para este elemento ser menor que o primeiro de U , devemos ter $b+c-d-1 < a$, ou seja, $b+c < a+d+1$ que sempre é verdade, pois $b < a$ e $c \leq d$, por hipótese. Assim sendo, as cores de $I(b)$ e de $I(c-1)$ são duas a duas diferentes.

Então, as cores de $I(a)$, U e $I(c-1)$ são diferentes duas a duas quando $a > b$ e $a+b \leq c+d$. \square

Com isto, chegamos ao teorema que nos assegura uma coloração com $\Delta(G)$ cores para cografos $abcd$ com $a > b$, $a(1) \leq a(2)$ e $c > b$.

Teorema 17 *Seja G um cografo da forma $abcd$ com $a > b$, $a+b \leq c+d$, $c \geq b+1$ e $d \geq c$. Então, conseguimos uma situação ideal para colorir G com $\Delta(G)$ cores.*

Prova: Com $c \geq b+1$ conseguimos construir as matrizes $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c-1)$ e $L'(d)$ quadradas para colorir as cliques geradas por $\beta_H(1,1)$, $\beta_H(1,2)$, $\beta_H(2,1)$ e $\beta_H(2,2)$, respectivamente, usando o algoritmo Pinta Cliques.

Estas matrizes serão construídas de acordo com as condições mostradas nesta seção para se conseguir, possivelmente, uma situação ideal.

Pelo Lema 18 se $a > b$ e $a+b \leq c+d$ conseguimos escolher cores para formar $I(a)$, U e $I(c-1)$ de forma que estas sequências possuam cores diferentes duas a duas.

Estas seqüências possuem, respectivamente, a , b e $c - 1$ cores. Assim conseguimos $a + b + c - 1$ cores livres e diferentes nos vértices de H . Dessa forma, conseguimos aproveitar as cores que ficaram livres nos vértices após o uso do algoritmo e chegamos na situação definida como ideal: existem cores livres suficientes e diferentes duas a duas para colorir o vértice $z \in V(G) \setminus V(H)$ de grau $a + b + c - 1$.

Assim, colorimos G com $\Delta(G)$ cores. \square

6.2.4 Cografos $abcd$ com a ímpar ou $a > b$ e $d \geq a + b$.

Esta seção será dedicada a pintar as arestas dos cografos $abcd$ que possuem $a + b \leq d$ e a ímpar ou $a > b$. A escolha das cores livres que faremos pintará cografos incluídos na Seção 6.2.3, pois $a + b \leq d$ nos leva a $a + b \leq c + d$, ou seja, $a(1) \leq a(2)$. Por outro lado, estas escolhas pintarão os cografos com $a = b$ e a ímpar. Novamente, considere $d \geq c$.

Aqui, também estaremos usando os algoritmos para colorir B e as cliques e procurando condições para se chegar a uma situação ideal. Considere que usamos o algoritmo da Seção 6.2.1 para colorir as arestas de B .

Em primeiro lugar, escolheremos as matrizes quadradas $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$. Desta escolha surge a necessidade de $L(b)$ (para a par) e $L(c)$ não serem inicialmente quadradas para pintarmos as cliques de H . Os Lemas 20, 19, 21 e o Teorema 18 mostram o porquê desta necessidade.

Seja a construção abaixo.

i. Construa $L'(b)$ da seguinte forma:

Se a é ímpar, selecione as b primeiras linhas consecutivas de $L(b)$;

Se a é par, suponha $a > b$ e selecione as b linhas consecutivas de $L(b)$ a partir da segunda linha;

ii. Construa $L'(c - 1)$ usando somente as últimas $c - 1$ linhas de $L(c - 1)$.

iii. Construa $L'(d)$ usando d últimas linhas consecutivas de $L(d)$ (sem demais restrições).

Novamente, podemos construir $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ pois $d \geq c \geq b + 1$.

Com $L'(a) = L(a)$ e usando Pinta Clique ($G[\beta(1, 1)], L'(a)$) e Pinta Clique ($G[\beta(1, 2)], L'(b)$) teremos

- $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, (c + d + 2(i - 1)) \bmod \Delta(G), \dots, a - 3, a - 1\}$;
- $I(b) = \{1, 3, 5, \dots, 2b - 1\}$ para a ímpar ou
 $I(b) = \{2, 4, 6, \dots, 2b, \}$ para a par.

Uma vez que $d \geq c \geq b+1$, $c+d-b-1 > c-1$ e para construir $L'(c-1)$ usamos somente as $c-1$ últimas linhas de $L(c-1)$, temos que a primeira linha de $L(c-1)$, até este ponto, ainda não foi usada. Denotaremos por C a seqüência de cores que definem esta primeira linha de $L(c-1)$.

$$C = \{a+b+1, a+b+2, \dots, a+b+c-1\}.$$

Voltando a idéia inicial, estamos procurando condições para que tenhamos cores diferentes e suficientes para colorir G a partir de H . Se todas as cores selecionadas forem diferentes e tiverem cardinalidade igual ao grau do vértice a ser inserido z , conseguiremos chegar a esta situação ideal, pois conseguiremos pintar as arestas incidentes a este novo vértice de forma a preservar a coloração válida que já existia em H .

Observe estes dois exemplos $G_1 = 3346$ e $G_2 = 4347$. Usaremos, respectivamente, a coloração obtida em $H_1 = 3336$ e $H_2 = 4337$. Para H_1 teremos

$$L_1(a) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 11 & 12 \\ 11 & \mathbf{12} & 1 \\ 12 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \right), L_1(b) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 3 & 4 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \right),$$

$$L_1(c-1) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 \\ \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \text{ e } L_1(d) = \left(\begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \right).$$

E para H_2 teremos

$$L_2(a) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{11} & 12 & 13 & 14 \\ 12 & \mathbf{13} & 14 & 1 \\ 13 & 14 & \mathbf{1} & 2 \\ 14 & 1 & 2 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \right), L_2(b) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \right),$$

$$L_2(c-1) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} \\ 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 13 \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 1 \\ 14 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \text{ e } L_2(d) = \left(\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right).$$

Com estas matrizes para H_1 e H_2 teremos que $I_1(a) = \{10, 12, 2\}$, $I_1(b) = \{1, 3, 5\}$ e $C_1 = \{7, 8, 9\}$. Para H_2 teremos $I_2(a) = \{11, 13, 1, 3\}$, $I_2(b) = \{2, 4, 6\}$ e $C_2 = \{8, 9, 10\}$.

Lema 19 *Se a é ímpar e $a < c+d+1$, as cores de $I(a)$ e $I(b)$ são distintas duas a duas.*

Prova: Sendo $a < c + d + 1$, as cores em $I(a)$ são diferentes duas a duas. De fato, para que as cores em $I(a)$ sejam duas a duas diferentes, a primeira cor deve ser maior que a última, ou seja, $\Delta(G) - a + 1 = c + d > a - 1$.

As cores de $I(b)$ formam uma seqüência crescente, portanto são diferentes duas a duas.

Compararemos, agora, $I(a)$ e $I(b)$.

Sendo a ímpar, as cores em $I(a)$ formam duas subsequências (progressões aritméticas de razão 2): uma de $c + d$ até $\Delta(G) = a + c + d - 1$ e outra de 2 até $a - 1$. Como a é ímpar, $I(b)$ é formado apenas por cores ímpares. Logo, as cores de $I(b)$ são duas a duas distintas da segunda subsequência de $I(a)$.

Como $d \geq c \geq b + 1$, temos que $\Delta(G) - a + 1 = c + d > 2b - 1$ (a primeira cor de $I(a)$ é maior que a última de $I(b)$).

Portanto as cores de $I(a)$ são diferentes das cores em $I(b)$. \square

Lema 20 *Se a é par e $a > b$ e $a < c + d + 1$, as cores de $I(a)$ e $I(b)$ são distintas duas a duas.*

Prova: De forma análoga ao Lema 19, temos que as cores em $I(a)$ são diferentes duas a duas e as cores de $I(b)$ são diferentes duas a duas.

Compararemos, agora, $I(a)$ e $I(b)$.

Sendo a par, as cores em $I(a)$ formam duas subsequências (progressões aritméticas de razão 2): uma de $c + d$ até $\Delta(G) = a + c + d - 1$ e outra de 1 até $a - 1$. Como a é par, $I(b)$ é formado apenas por cores pares. Logo, as cores de $I(b)$ são duas a duas distintas da segunda subsequência de $I(a)$.

Como $d \geq c \geq b + 1$, temos que $\Delta(G) - a + 1 = c + d > 2b$ (a primeira cor de $I(a)$ é maior que a última de $I(b)$).

Portanto as cores de $I(a)$ são diferentes das cores em $I(b)$. \square

Lema 21 *Se a é ímpar ou $a > b$ e $d \geq a + b$, então as cores de $I(a)$, $I(b)$ e C são diferentes duas a duas.*

Prova: Se $d \geq a + b$, então $c + d + 1 \geq a$, pois $b \geq 2$. Uma vez que $c + d > 2b - 1$ (quando a é ímpar) ou $c + d > 2b$ (quando a é par e $a > b$), pelos Lemas 20 e 19, temos que $I(a)$ e $I(b)$ possuem cores diferentes duas a duas.

As cores de C formam uma seqüência crescente, logo são diferentes duas a duas.

Comparando as cores em $I(a)$ e as cores em C , temos que a última (e maior) cor de C é menor que a primeira (e menor) de $I(a)$ ($c + d > a + b + c - 1$), pois $d \geq a + b$. Novamente, $I(a)$ cresce com “mod”. Dentre as menores (e últimas) cores de $I(a)$ temos

que a maior é $a - 1$ que é sempre menor que $a + b - 1$ (a menor de C). Assim sendo, as cores de C e $I(a)$ são diferentes duas a duas.

Quando a é ímpar, as cores de $I(b)$ formam uma seqüência de elementos ímpares de 1 até $2b - 1$. Quando a é par, as cores de $I(b)$ formam uma seqüência de elementos pares de 2 até $2b$. Analisando as seqüências $I(b)$ e C , temos, para em ambos os casos (a ímpar ou $a > b$), o último elemento de $I(b)$ ($2b - 1$ ou $2b$) menor que o primeiro de C , pois $a + b + 1 \geq 2b + 1 > 2b$. Portanto, as cores de C e $I(b)$ são diferentes duas a duas.

Dessa forma, temos que as cores de C , $I(a)$ e $I(b)$ são diferentes duas a duas. \square

Teorema 18 *Seja G um cografo da forma $abcd$ com a ímpar ou $a > b$, $d \geq a + b$ e $c \geq b + 1$. Conseguimos uma situação ideal para colorir G com $\Delta(G)$ cores.*

Prova: Com $c \geq b + 1$ conseguimos construir as matrizes $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ quadradas para colorir as cliques geradas por $\beta_H(1, 1)$, $\beta_H(1, 2)$, $\beta_H(2, 1)$ e $\beta_H(2, 2)$, respectivamente, usando o algoritmo “Pinta Cliques”.

Estas matrizes serão construídas de acordo com as condições mostradas nesta seção para se conseguir, possivelmente, uma situação ideal.

Com a ímpar ou $a > b$ e $d \geq a + b$, temos, pelo Lema 21, que as cores de C , $I(a)$, $I(b)$ são diferentes duas a duas.

As seqüências definidas por C , $I(a)$ e $I(b)$ tem $c - 1$, a e b cores respectivamente. Portanto, conseguimos $a + b + c - 1$ cores distintas duas a duas.

Sendo $c \geq b + 1$, pelo Corolário 8, o Algoritmo “Pinta Clique” pinta as arestas da clique gerada por $\beta(2, 2)$.

Assim sendo, usando o algoritmo “Pinta Clique” para colorir as cliques geradas pelos elementos da β -partição de H conseguimos aproveitar as cores que ficaram livres nestes vértices após o uso do algoritmo e chegamos na situação definida como ideal: existem cores livres suficientes e diferentes duas a duas para colorir o vértice $z \in V(G) \setminus V(H)$ de grau $a + b + c - 1$.

Portanto, conseguimos colorir G com $\Delta(G)$ cores. \square

Vale a pena notar que o algoritmo mostrado nesta seção colore as arestas de muitos cografos que o algoritmo da Seção 6.2.3 também colore. Este algoritmo colore as arestas dos cografos $abcd$ que possuem a ímpar e $a = b$; o algoritmo da Seção 6.2.3 não pinta estes grafos.

Sejam os cografos $G_1 = 4347$, $G_2 = 5567$ e $G_3 = 5347$. Para pintar as arestas de G_1 podemos usar o algoritmo definido pelo Teorema 18 ou o algoritmo definido na Seção 6.2.3 pelo Teorema 17. Já para pintar as arestas de G_2 teremos de usar o algoritmo definido pelo Teorema 18. Para pintar as arestas de G_3 usaremos o Teorema 17.

6.2.5 Cografos $abcd$ com $a > b$ e $a(1) > a(2)$.

Todos os algoritmos e esquemas para coloração de arestas dos cografos $abcd$ vistos até esta seção não são capazes de colorir cografos $abcd$ que possuem $a + b > c + d$.

Novamente, aqui, estaremos procurando condições para se chegar a uma situação ideal. Entretanto, nossa preocupação será em tratar alguns casos de cografos $abcd$ com $a(1) > a(2)$, ou seja, $a + b > c + d$ (com $a \geq b$ e $d \geq c \geq b + 1$).

Observe que se $a = b + 1$ ou $a = b + 2$, então $a(1) \leq a(2)$, pois c e d são maiores ou iguais a $b + 1$. Logo, para $a(1) > a(2)$ com $a > b$ e $d \geq c \geq b + 1$, tem-se que $a \geq b + 3$.

Aqui, também estaremos usando os algoritmos da Seção 6.2.1 para colorir B e os da Seção 6.2.2 para colorir as cliques. Novamente considere H como sendo $ab(c - 1)d$.

Para construir $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ sejam as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$ da página 65 retornadas após o uso do algoritmo da Seção 6.2.1 que pinta as arestas de B .

- i. Construa $L'(b)$ usando b últimas linhas consecutivas de $L(b)$, ou seja, escolha b linhas a partir da $(a - b + 1)$ -ésima linha de $L(b)$;
- ii. Para $L'(c - 1)$ escolha as $c - 1$ primeiras linhas consecutivas de $L(c - 1)$;
- iii. Escolha as d últimas linhas consecutivas de $L(d)$.

Como $c \geq b + 1$, conseguimos linhas suficientes em cada matriz construída. Faça $L'(a) = L(a)$. Assim, após usar Pinta Clique ($G[\beta(1, 1)], L'(a)$), Pinta Clique ($G[\beta(1, 2)], L'(b)$), Pinta Clique ($G[\beta(2, 1)], L'(c - 1)$) e Pinta Clique ($G[\beta(2, 2)], L'(d)$), teremos:

- $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, (\Delta(G) - a + 2(i - 1) + 1) \bmod \Delta(G), \dots, a - 3, a - 1\}$;
- $I(b) = \{a - b + 1, a - b + 3, \dots, a + b - 1\}$.
- $I(c - 1) =$
 - $\{a + b + 1, a + b + 3, \dots, (a + b + 2c - 3) \bmod \Delta(G)\}$ para $(a + b) \equiv (c + d) \bmod 2$;
 - ou
 - $\{a + b + 2, a + b + 4, \dots, (a + b + 2c - 2) \bmod \Delta(G)\}$ para $(a + b) \not\equiv (c + d) \bmod 2$.

Veja como ficam as matrizes para $G = 7344$ e $H = 7334$.

$$L(a) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{8} & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 9 & \mathbf{10} & 11 & 12 & 13 & 14 & 1 \\ 10 & 11 & \mathbf{12} & 13 & 14 & 1 & 2 \\ 11 & 12 & 13 & \mathbf{14} & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \mathbf{6} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, L(b) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

$$L(c-1) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{11} & 12 & 13 \\ 12 & \mathbf{13} & 14 \\ 13 & 14 & \mathbf{1} \\ & 14 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right), L(d) = \left(\begin{bmatrix} 14 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

Ou seja, $I(a) = \{8, 10, 12, 14, 2, 5, 6\}$, $I(b) = \{5, 7, 9\}$ e $I(c-1) = \{11, 13, 1\}$.

Lema 22 *As cores de $I(b)$ são diferentes duas a duas.*

Prova: Uma vez que $I(b)$ é uma seqüência crescente e $a + b - 1 < \Delta(G)$, não há como possuir valores repetidos. \square

Para os próximos resultados, considere $a \not\equiv (c + d) \pmod{2}$.

Lema 23 *Se $a \leq c + d$, $a \not\equiv (c + d) \pmod{2}$ e $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$, então as cores de $I(a)$ e $I(b)$ são duas a duas distintas.*

Prova: Como $a \leq c + d$, pelo Lema 15 (Seção 6.2.3) as cores de $I(a)$ são diferentes duas a duas. E, como pelo Lema 22 as cores de $I(b)$ também são diferentes duas a duas, resta verificar se alguma cor de $I(a)$ está em $I(b)$.

Como $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$, então $(a - b + 1) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$, ou seja, nenhuma cor de $I(b)$ coincide com a primeira subsequência de $I(a)$. Da mesma forma, $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$ e $(a - 1) \equiv (c + d) \pmod{2}$ nos leva a $(a - b + 1) \not\equiv (a - 1) \pmod{2}$.

Assim sendo, as cores de $I(b)$ também são diferentes das cores da segunda subsequência de $I(a)$. \square

Lema 24 *Se $a \leq c + d$ e $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$, então as cores de $I(b)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas.*

Prova: Os Lemas 22 e 16 (Seção 6.2.3) nos garantem que as cores de $I(b)$ são diferentes duas a duas e as cores de $I(c-1)$ são diferentes duas a duas, respectivamente. Vamos verificar se nenhuma cor de $I(b)$ está em $I(c-1)$ e vice-versa.

- Quando $(a + b + 2c - 3) < \Delta$.

As cores de $I(c-1)$ formam uma seqüência crescente e como $(a + b - 1) < (a + b + 1)$ (o maior elemento de $I(b)$ é menor que o menor elemento de $I(c-1)$), as cores de $I(c-1)$ e $I(b)$ são duas a duas distintas.

- Se $(a + b + 2c - 3) > \Delta$. (Note que $(a + b + 2c - 3) \pmod{\Delta} = b + c - d - 2$).

- Se $(a + b - 1) \equiv \Delta \pmod{2}$, então $(b + c - d - 2) \equiv (a - b + 1) \pmod{2}$. Por isso, para não haver sobreposição (elementos repetidos), devemos ter $b + c - d - 2 < a - b + 1$. Como $a \leq c + d$, devemos verificar se $b + c - d - 2 < c + d - b + 1$, que é sempre verdade.
Como, além disso, $(a + b - 1) < (a + b + 1)$, as cores de $I(b)$ e $I(c - 1)$ são duas a duas distintas.
- Caso contrário, $(b + c - d + 2) \not\equiv (a - b + 1) \pmod{2}$, ou seja, se a segunda subsequência de $I(c - 1)$ cresce muito, o máximo que ocorre é uma intercalação dos valores de $I(c - 1)$ e $I(b)$.
Também neste subcaso teremos cores distintas duas a duas em $I(b)$ e $I(c - 1)$.

□

Por fim, conseguimos nos convencer que chegamos a uma situação ideal.

Teorema 19 *Seja G um cografo da forma $abcd$, $d \geq c \geq b + 1$, $a + b > c + d$, $a \leq c + d$ e $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$ e $a \not\equiv (c + d) \pmod{2}$. Conseguimos uma situação ideal para colorir G com $\Delta(G)$ cores.*

Prova: Com $c \geq b + 1$ conseguimos construir as matrizes $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c - 1)$ e $L'(d)$ quadradas para colorir as cliques geradas por $\beta_H(1, 1)$, $\beta_H(1, 2)$, $\beta_H(2, 1)$ e $\beta_H(2, 2)$, respectivamente, usando o algoritmo “Pinta Cliques”.

Estas matrizes serão construídas de acordo com as condições mostradas nesta seção para se conseguir, possivelmente, uma situação ideal.

Uma vez que $a \leq c + d$ e $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$, pelo Lema 24 as cores de $I(b)$ e de $I(c - 1)$ são duas a duas distintas. Com $a \leq c + d$, $a \not\equiv (c + d) \pmod{2}$ e $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$ as cores de $I(a)$ e de $I(b)$ são diferentes duas a duas. E com $a \leq c + d$, pelo Lema 17 (Seção 6.2.3), temos que as cores de $I(a)$ e $I(c - 1)$ são duas a duas distintas.

As seqüências definidas por $I(a)$, $I(b)$ e $I(c - 1)$ possuem, respectivamente, a , b e $c - 1$ cores. Assim conseguimos $a + b + c - 1$ cores livres e diferentes nos vértices de H . Dessa forma, conseguimos aproveitar as cores que ficaram livres nos vértices após o uso do algoritmo e chegamos na situação definida como ideal: existem cores livres suficientes e diferentes duas a duas para colorir o vértice $z \in V(G) \setminus V(H)$ de grau $a + b + c - 1$.

Assim, também colorimos G com $\Delta(G)$ cores.

□

6.2.6 Cografos $abcd$ com a par e $a = b$

Todo o processo de coloração de um cografo G da forma $abcd$ apresentado até este ponto falha quando temos a par e $a = b$. Portanto, esta seção será dedicada a pintar alguns

cografos $abcd$ que possuem $a = b$ com a par, $c \geq b + 1$ e $d \geq c$.

O que difere este método de coloração em relação aos métodos das seções anteriores, é no fato de algumas cores de $I(a)$ se repetirem em $I(b)$. Obviamente, teremos de contornar este problema. A solução apresentada usa troca nas cores de algumas arestas já pintadas.

Observe, primeiro, que $a(1) < a(2)$, pois $a + b = 2b$ e $c + d \geq 2b + 2$.

De forma análoga às seções anteriores, considere que B já está com suas arestas coloridas usando o algoritmo da Seção 6.2.1. Considere, também, as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$.

Suponha $(c + d) \not\equiv (a + b) \pmod{2}$. Como $a = b$, $a + b$ é sempre par. Portanto $(c + d)$ é ímpar, e, como a é par, $\Delta(G) = a + c + d - 1$ é par.

Considere a construção abaixo.

- i. Como estamos supondo $a = b$, faça $L'(a) = L(a)$ e $L'(b) = L(b)$.
- ii. Construa $L'(c - 1)$ da seguinte forma:
 - Se $\Delta(G) - c = (a + d - 1) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$, ou seja, $a \equiv c \pmod{2}$, selecione as $c - 1$ últimas linhas consecutivas de $L(c - 1)$; (é equivalente a dizer para selecionar as $c - 1$ linhas consecutivas a partir da $(d - b + 1)$ -ésima linha de $L(c - 1)$).
 - Caso contrário, selecione as $c - 1$ linhas consecutivas a partir da $(d - b)$ -ésima linha de $L(c - 1)$.
- iii. Construa $L'(d)$ usando últimas d linhas consecutivas de $L(d)$. Novamente, só conseguiremos d linhas consecutivas de $L(d)$ se $c \geq b + 1$.

A escolha de $L'(c - 1)$ se justifica por minimizar o número de cores comuns entre $I(c - 1)$ e $I'(a)$ que será definido posteriormente. A escolha de $L'(d)$ é feita de forma que as cores que se repetem em $I(a)$ e $I(b)$ também estejam presentes em $I(d)$. Isto tornará possível as trocas das cores de algumas arestas já pintadas de $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(1)}$ para garantir a coloração das arestas usando apenas Δ cores para os casos especificados.

Usando Pinta Clique $(G[\beta(1, 1)], L'(a))$, Pinta Clique $(G[\beta(1, 2)], L'(b))$, Pinta Clique $(G[\beta(2, 1)], L'(c - 1))$ e Pinta Clique $(G[\beta(2, 2)], L'(d))$, teremos

- $I(a) = \{c + d, c + d + 2, \dots, \Delta(G) - 1, 1, \dots, a - 3, a - 1\}$;
- $I(b) = \{1, 3, 5, \dots, 2a - 1\}$.
- $I(c - 1) = \{a + d + 1, a + d + 1, \dots, (a + d + 2c - 3) \pmod{\Delta(G)}\}$, se $a \equiv c \pmod{2}$, ou $I(c - 1) = \{a + d, a + d + 2, \dots, (a + d + 2c - 4) \pmod{\Delta(G)}\}$, caso contrário.
- $I(d) = \{a + 2c - 1, \dots, (a + 2c + 1) \pmod{\Delta(G)}, \dots, 1, 3, \dots, c + d - 2\}$;

Veja como ficam as matrizes e as cores escolhidas para o algoritmo quando $G = 4467$, ou seja, $H = 4457$.

$$L(a) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{13} & 14 & 15 & 16 \\ 14 & \mathbf{15} & 16 & 1 \\ 15 & 16 & \mathbf{1} & 2 \\ 16 & 1 & 2 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, L(b) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

$$L(c-1) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{12} & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & \mathbf{14} & 15 & 16 & 1 \\ 14 & 15 & \mathbf{16} & 1 & 2 \\ 15 & 16 & 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 16 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ e } L(d) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{15} & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 16 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \mathbf{9} & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \mathbf{11} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Com estas matrizes, chegamos a $I(a) = \{13, 15, 1, 3\}$, $I(b) = \{1, 3, 5, 7\}$, $I(c-1) = \{12, 14, 16, 2, 4\}$ e $I(d) = \{15, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Lema 25 *As cores $1, 3, \dots, a-1$ são comuns a $I(a)$, $I(b)$ e $I(d)$.*

Prova: Como $a-1$ é sempre menor que $2a-1$, temos que as cores $1, 3, \dots, a-1$ estão em $I(a)$ e $I(b)$.

As cores em $I(d)$ são todas ímpares pois $a+2c-1$ é ímpar e $\Delta(G)$ é par. Além disso, $I(d)$ possui d cores e a subsequência $a+2c-1, \dots, \Delta(G)-1$ possui $\frac{d-c+1}{2} < d$ cores. Logo 1 está presente em $I(d)$.

Ainda, $c+d-2 > a-1$. De fato, $c+d \geq b+1+d = a+1+d > a+1$ ($d > 0$). Logo, as cores $1, \dots, a-1$ estão em $I(d)$. \square

Observação 2 *Análise $I(a)$, $I(b)$ e $I(d)$ mostrados acima e verifique que (veja a página 64 para relembrar a notação):*

- As cores $1, 3, \dots, a-1$ em $I(a)$ estão livres nos vértices $u_{\frac{a}{2}+1}, u_{\frac{a}{2}+2}, \dots, u_{a-1}, u_a$, respectivamente.
- As cores $1, 3, \dots, a-1$ em $I(b)$ estão livres nos vértices $u_{a+1}, u_{a+2}, \dots, u_{\frac{3a}{2}}$, respectivamente.
- As cores $1, 3, \dots, a-1$ em $I(d)$ estão livres nos vértices $w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+\frac{a}{2}}$, respectivamente.
- Além disso, todas as cores em $I(a)$, $I(b)$ e $I(d)$ são ímpares.

O próximo passo é descobrir qual o verdadeiro valor de i . Sabemos que w_{i+1} é o vértice que apresenta a cor 1 livre em $I(d)$. Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} (a + 2c + 2(i + 1) - 3) \bmod \Delta(G) &= 1 \\ a + 2c + 2i - 1 - (\Delta(G)) &= 1 \\ a + 2c - 2i - 1 - a - c - d + 1 &= 1 \\ 2i &= d - c + 1 \\ i &= (d - c + 1)/2 \end{aligned}$$

Assim sendo, como $c + d$ é ímpar e, por hipótese, $c \leq d$, temos que $d - c$ é ímpar e positivo. Portanto, i é um inteiro maior ou igual a 1. Ainda, $w_{i+1} = w_{\frac{(d-c+3)}{2}}$.

Lema 26 *As cores em $I(b)$ e $I(c - 1)$ são diferentes duas a duas.*

Prova: Se c é par então $a \equiv c \bmod 2$ e d é ímpar. Assim, $I(c - 1) = \{a + d + 1, \dots, (a + d + 2c - 3) \bmod \Delta(G)\}$. Como $\Delta(G)$ é par, todos os elementos de $I(c - 1)$ são pares, pois, a primeira (e possivelmente única) subsequência de $I(c - 1)$ possui elementos pares e, se houver uma segunda subsequência originada pela operação \bmod no valor de $\Delta(G)$ (também par), todos os elementos também serão pares.

Da mesma forma, se c é ímpar então, $a \not\equiv c \bmod 2$ e d é par. Portanto $I(c - 1) = \{a + d, a + d + 2, \dots, (a + d + 2c - 4) \bmod \Delta(G)\}$ é formado por elementos pares.

De fato, todos os elementos de $I(b)$ são ímpares e todos os elementos de $I(c - 1)$ são pares. Logo, as cores de $I(b)$ e $I(c - 1)$ são diferentes duas a duas. □

Como buscamos uma situação ideal, temos de fazer com que as cores de $I(a)$ e de $I(b)$ sejam diferentes. Note que a coloração das arestas que incidem em z não usa as cores livres em $I(d)$ (lembre que z só é adjacente aos vértices de $\alpha_H(1)$ e de $\beta_H(2, 1)$).

Iremos fazer uma mudança na cor de algumas arestas do multipartido completo $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$.

A coloração proposta na Seção 6.2.1 dá a seguinte cor para as arestas abaixo:

- A aresta $(u_{\frac{a}{2}+1}, w_{\frac{(d-c+3)}{2}})$ tem cor $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$;
- A aresta $(u_{\frac{a}{2}+2}, w_{\frac{(d-c+5)}{2}})$ tem cor $\frac{\Delta(G)}{2} + 3$;
- ...;
- A aresta $(u_{a-1}, w_{\frac{(d-c+a-1)}{2}})$ tem cor $\frac{\Delta(G)+2(a-3)}{2} = \frac{\Delta(G)}{2} + (a - 3)$;
- A aresta $(u_a, w_{\frac{(d-c+a+1)}{2}})$ tem cor $\frac{\Delta(G)+2(a-1)}{2} = \frac{\Delta(G)}{2} + (a - 1)$.

Como $a - 1 < c + d$, então $\frac{\Delta(G)}{2} + (a - 1) < \Delta(G)$. Dessa forma, todas as cores acima descritas são menores que $\Delta(G)$. Ou seja, a operação *mod* no valor de $\Delta(G)$ não faz aparecer um subsequência.

Como a cor 1 está livre nos vértices $u_{\frac{a}{2}+1}$ e $w_{\frac{(d-c+3)}{2}}$, a cor 3 está livre nos vértices $u_{\frac{a}{2}+2}$ e $w_{\frac{(d-c+5)}{2}}$, ..., a cor $a - 1$ está livre nos vértices u_a e $w_{\frac{(d-c+a+1)}{2}}$, podemos alterar a cor das arestas citadas no parágrafo anterior, da seguinte forma:

- Faça a aresta $(u_{\frac{a}{2}+1}, w_{\frac{(d-c+3)}{2}})$ ter cor 1;
- Faça a aresta $(u_{\frac{a}{2}+2}, w_{\frac{(d-c+5)}{2}})$ ter cor 3;
- ...;
- Faça a aresta $(u_{a-1}, w_{\frac{(d-c+a-1)}{2}})$ ter cor $a - 3$;
- Faça a aresta $(u_a, w_{\frac{(d-c+a+1)}{2}})$ ter cor $a - 1$.

Então a nova sequência de cores livres nos vértices de $\beta_H(1, 1)$ é

$$I'(a) = \{c+d, c+d+2, \dots, \Delta(G)-1, \frac{\Delta(G)}{2}+1, \frac{\Delta(G)}{2}+3, \dots, \frac{\Delta(G)}{2}+a-3, \frac{\Delta(G)}{2}+a-1\}.$$

Figura 6.7 mostra a troca de cor de duas arestas de $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$ correspondente aos vértices de $H = 4457$ de $G = 4467$ mostrado na página 6.2.6. Neste exemplo temos $I'(a) = \{13, 15, 9, 11\}$.

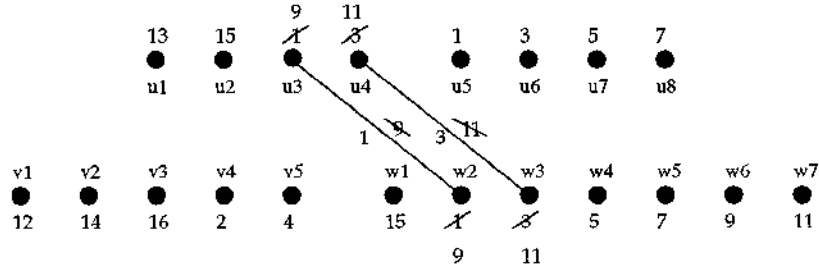


Figura 6.7: Exemplo de troca de cor de duas arestas de $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$.

Lema 27 Se $\Delta(G)/2$ é par e $a \leq (c+d)/3$, então $I'(a)$ e $I(c-1)$ possuem cores duas a duas distintas.

Prova: Com $\Delta(G)/2$ par, todos os elementos de $I'(a)$ são ímpares. Uma vez que $a \leq (c+d)/3$, temos que $\Delta(G)/2 + (a-1)$ é menor que $c+d$. Portanto os elementos de $I'(a)$ são dois a dois distintos.

Uma vez que todos os elementos de $I(c-1)$ são pares, $I'(a)$ e $I(c-1)$ possuem cores duas a duas diferentes. \square

Lema 28 *Se $\Delta(G)/2$ é ímpar, as cores de $I'(a)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas se $a < d - c + 5$ quando $a \equiv c \pmod{2}$, ou se $a < d - c + 3$ quando $a \not\equiv c \pmod{2}$.*

Prova: Se $\Delta(G)/2$ é ímpar, a segunda subsequência de $I'(a)$ ($\frac{\Delta(G)}{2} + 1, \dots, \frac{\Delta(G)}{2} + a - 1$) é formada por elementos pares. Portanto, todas cores da primeira subsequência de $I'(a)$ são diferentes das cores da segunda subsequência de $I'(a)$.

Os elementos de $I(c-1)$ são todos pares. Quando $a \equiv c \pmod{2}$ e $a < d - c + 5$, então $\Delta(G)/2 + a - 1 < a + d + 1$. Quando $a \not\equiv c \pmod{2}$ e $a < d - c + 3$, então $\Delta(G)/2 + a - 1 < a + d$. (a última cor par de $I'(a)$ é menor que a primeira cor de $I(c-1)$).

Se $a + d + 2c - 3 > \Delta(G)$, então $(a + d + 2c - 3) \pmod{\Delta(G)} = c - 2$ que é menor que $(\Delta(G) + 2)/2$ (a última cor possível da segunda subsequência de $I(c-1)$ é menor que a primeira cor de $I'(a)$). A mesma afirmação é válida para quando $a + d + 2c - 4 > \Delta(G)$.

Se $a + d + 2c - 3$ ou $a + d + 2c - 4$ é maior que $\Delta(G)$ não temos coincidência de valores de $I(c-1)$ com $I(a)$, pois $a + d + 2c - 3$ ou $a + d + 2c - 4$ será um valor par e os valores da primeira sequência de $I'(a)$ são todos ímpares.

Dessa forma não há duas cores iguais em $I'(a)$ e $I(c-1)$. □

Resta verificar se $I'(a)$ e $I(b)$ possuem todos os elementos diferentes dois a dois.

Lema 29 *Se $\Delta(G)/2$ é par e $a \leq (c+d)/3$, então $I'(a)$ e $I(b)$ possuem cores duas a duas distintas.*

Prova: Como, por hipótese, $\Delta(G)$ é par e $a \leq (c+d)/3$, então, como visto no Lema 27, todos os elementos de $I'(a)$ são dois a dois diferentes.

Com $a \leq (c+d)/3$, temos $(\Delta(G) + 2)/2 > 2a - 1$. Assim sendo, a última cor de $I(b)$ é menor que a primeira da segunda subsequência com elementos ímpares de $I'(a)$.

Se $a \leq (c+d)/3$, temos que $2a - 1 < c + d$, ou seja, novamente o último elemento de $I(b)$ é menor que o todos os elementos da primeira subsequência de $I'(a)$.

Portanto, $I'(a)$ e $I(b)$ possuem cores duas a duas diferentes. □

Lema 30 *Se $\Delta(G)/2$ é ímpar, então as cores de $I'(a)$ e $I(b)$ são duas a duas distintas.*

Prova: Com $\Delta(G)/2$ ímpar, conforme visto no Lema 28, temos que todos os elementos de $I'(a)$ são dois a dois diferentes e somente a primeira subsequência $(c+d, \dots, \Delta(G)-1)$ é formada por números ímpares.

Basta, então, verificar se $2a - 1 < c + d$ (o último elemento de $I(b)$ é menor que o primeiro elemento de mesma paridade em $I(a)$). Como $a = b$, temos que $a + b < c + d$, pois $c \geq b + 1$ e $d \geq c$.

Assim sendo, quando $\Delta(G)/2$ é ímpar, as cores em $I'(a)$ e $I(b)$ são duas a duas distintas. \square

Assim, chegamos aos corolários que nos ajudam a formular os resultados finais.

Corolário 11 *Se $\Delta(G)/2$ é par e $a \leq (c+d)/3$, então as cores em $I'(a)$, $I(b)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas.*

Prova: Lemas 26, 27 e 29. \square

Corolário 12 *Se $\Delta(G)/2$ é ímpar, então as cores em $I'(a)$, $I(b)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas se $a < d - c + 5$ quando $a \equiv c \pmod{2}$ ou $a < d - c + 3$ quando $a \not\equiv c \pmod{2}$.*

Prova: Lemas 26, 28 e 30. \square

Com isto, chegamos ao teorema que nos assegura uma coloração com $\Delta(G)$ cores para alguns cografos com a par e $a = b$.

Teorema 20 *Seja G um cografo da forma $abcd$ com $a = b$, $d \geq c \geq b + 1$ e $(a + b) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$. Se $\Delta(G)/2$ é par com $a \leq (c + d)/3$ ou $\Delta(G)/2$ é ímpar com $a < d - c + 5$ quando $a \equiv c \pmod{2}$ ou $a < d - c + 3$ quando $a \not\equiv c \pmod{2}$, então, conseguimos uma situação ideal para colorir as arestas de G com $\Delta(G)$ cores.*

Prova: Com $c \geq b + 1$ conseguimos construir as matrizes $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c-1)$ e $L'(d)$ quadradas para colorir as cliques geradas por $\beta_H(1, 1)$, $\beta_H(1, 2)$, $\beta_H(2, 1)$ e $\beta_H(2, 2)$, respectivamente, usando o algoritmo “Pinta Cliques”.

Estas matrizes serão construídas de acordo com as condições mostradas no início desta seção para se conseguir, possivelmente, uma situação ideal.

Se encontramos G com $\Delta(G)/2$ par e $a \leq (c+d)/3$ ou com $\Delta(G)$ ímpar e $a < d - c + 5$ quando $a \equiv c \pmod{2}$ ou $a < d - c + 3$ quando $a \not\equiv c \pmod{2}$, os Corolários 11 e 12 nos garantem que todas as cores em $I'(a)$, $I(b)$ e $I(c-1)$ são duas a duas distintas.

Mais uma vez chegamos em uma situação ideal, pois estas seqüências possuem, respectivamente, a , b e $c - 1$ cores. Assim conseguimos $a + b + c - 1$ cores livres e diferentes nos vértices de H .

Dessa forma, aproveitamos as cores que ficaram livres nos vértices após o uso do algoritmo que pinta $B_{\alpha_H(1), \alpha_H(2)}$ e o algoritmo “Pinta Cliques” para colorir as arestas das cliques geradas por $\beta_H(1, 1)$, $\beta_H(1, 2)$, $\beta_H(2, 1)$, $\beta_H(2, 2)$, fazer as trocas nas cores das arestas mostradas no início desta seção e ainda existem cores livres suficientes e diferentes duas a duas para colorir o vértice $z \in V(G) \setminus V(H)$ de grau $a + b + c - 1$.

Pintamos, assim, de forma válida as arestas de G com $\Delta(G)$ cores. \square

Com estas escolhas, o grafo 4467 cujas matrizes são encontradas na página 84 é pintado com 16 cores. Com este algoritmo não conseguimos situação ideal para colorir o grafo 4456 com Δ cores.

Note que nesta seção os cografos $abcd$ que tiveram suas arestas coloridas foram aqueles com $a = b$ par e $(a + b) \not\equiv (c + d) \pmod{2}$.

Para alguns casos com $(a + b) \equiv (c + d) \pmod{2}$ podemos usar o algoritmo da Seção 6.2.8.

6.2.7 Cografos $abcd$ com $a = b = 2$

Nesta seção, apresentamos uma variação do algoritmo apresentado na Seção 6.2.4 para colorir um

Seja o Corolário abaixo.

Corolário 13 *Seja G um cografo da forma $22cd$ com $d \geq c \geq 3$, então G não é O nem NO .*

Prova: G pertence ao conjunto dos cografos cobertos pelo Lema 14. Por este lema, para G ser SO , deveríamos ter

$$3c + 3d + 1 > 2cd \quad \text{ou} \quad c + d + 1 > cd.$$

Como, por hipótese, $d \geq c \geq 3$, estas desigualdades nunca são satisfeitas.

Pelo Teorema 15 (Capítulo 5 e [1]), G é SO se e somente se é O ou NO . Como G não pode ser SO , então G não é O nem NO . \square

Assim sendo, se os cografos $22cd$ também satisfizerem a Conjectura 2, pelo Lema 13 teríamos que todos estes grafos são Δ -coloríveis.

Coloração para $22cd$

Veja as Figura 6.8 e 6.9. A coloração usada para 2253 segue a mesma idéia da coloração usada na Seção 6.2.4, com duas mudanças:

- i. Mudança na coloração das arestas do grafo bipartido completo $B = B(\alpha_H(1), \alpha_H(2))$;
- ii. Uma troca da cor feita em uma aresta de B .

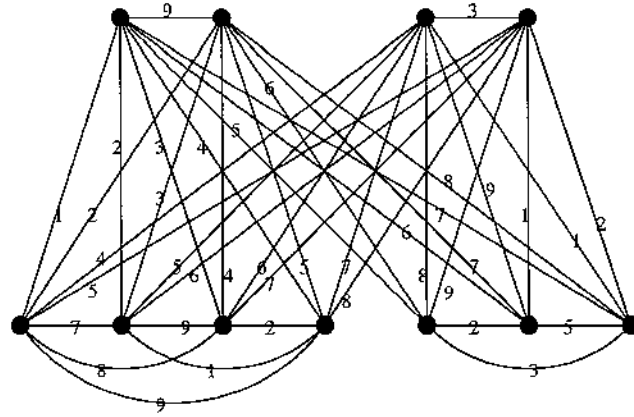


Figura 6.8: Uma coloração para 2243 com $\Delta(2253) = 9$ cores.

Novamente, organize os vértices de H em duas fileiras horizontais, chamando u_i um vértice na fileira superior ($1 \leq i \leq 4$, $u_i \in \alpha_H(1)$), v_j um vértice nas $c - 1$ primeiras colunas da fileira inferior ($1 \leq j \leq c - 1$, $v_j \in \beta(2, 1)$) e w_k um vértice nas d últimas colunas da fileira inferior ($1 \leq k \leq d$, $w_k \in \beta(2, 2)$), conforme apresentado na Seção 6.2.4

Pinte as arestas do bipartido completo B da seguinte forma:

- Pinte as arestas (u_i, v_j) com a cor $(i + j - 1) \bmod \Delta(G)$, para $1 \leq i \leq a + b$ e $1 \leq j \leq c - 1$;
- Pinte as arestas (u_i, w_k) com a cor $(i + (k + c - 1)) \bmod \Delta(G)$, para $1 \leq i \leq a + b$ e $1 \leq k \leq d$.

Esta coloração para B chamaremos de *Algoritmo “Pula 1”*, pois, em comparação com o algoritmo mostrado na Seção 6.2.4 quando procurávamos uma situação ideal, este algoritmo pula uma cor que viria na seqüência para se colorir as arestas que incidem nos vértices de $\beta(1, 2)$ e de $\alpha(2)$. No exemplo mostrado na Figura 6.8, a aresta (u_3, v_1) pintado com o algoritmo “Pula 1” tem a cor 4 e se tivéssemos usado o algoritmo da Seção 6.2.4 teria a cor 3.

Usando as mesmas construções para $L(a)$, $L(b)$, $L(c - 1)$ e $L(d)$, temos:

$$L(a) = \begin{pmatrix} \Delta(G) - 1 & \Delta(G) \\ \Delta(G) & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

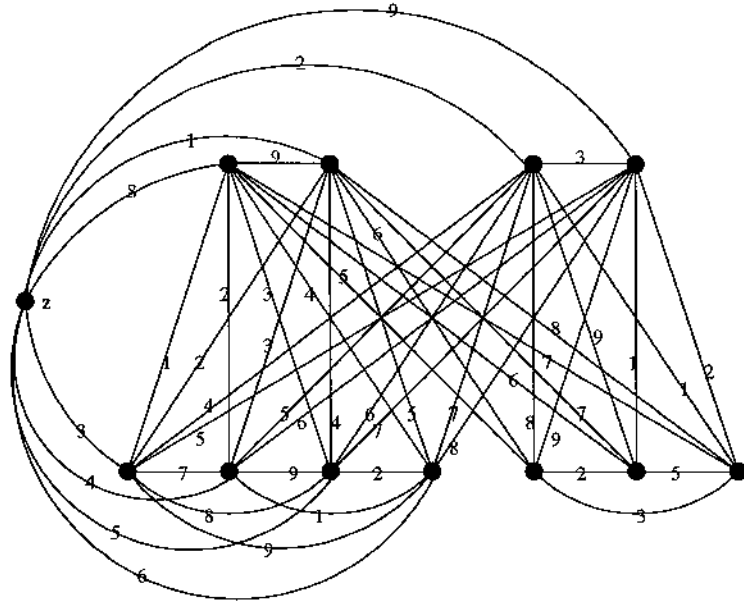


Figura 6.9: Uma coloração para 2253.

$$L(c-1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & c & c+1 \\ 6 & 7 & \cdots & c+3 & c+4 \\ 7 & 8 & \cdots & c+4 & (c+5) \bmod \Delta(G) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \Delta(G)-1 & \Delta(G) & \cdots & c-4 & c-3 \\ \Delta(G) & 1 & \cdots & c-3 & c-2 \end{pmatrix}$$

$$L(d) = \begin{pmatrix} c+2 & c+3 & \cdots & \Delta(G)-1 & \Delta(G) \\ (c+5) \bmod \Delta(G) & (c+6) \bmod \Delta(G) & \cdots & 2 & 3 \\ (c+6) \bmod \Delta(G) & (c+7) \bmod \Delta(G) & \cdots & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c-2 & c-1 & \cdots & c+d-4 & c+d-3 \\ c-1 & c & \cdots & c+d-3 & c+d-2 \end{pmatrix}$$

Corolário 14 Se $c \geq 4$ e $d \geq 3$, as matrizes $L(a)$, $L(b)$, $L(c-1)$ e $L(d)$ geram matrizes quadradas $L'(a)$, $L'(b)$, $L'(c-1)$ e $L'(d)$ que são suficientes para colorir as cliques geradas pelos vértices de $\beta(1,1)$, $\beta(1,2)$, $\beta(2,1)$ e $\beta(2,2)$ usando o algoritmo “Pinta Cliques”.

Prova: Podemos ter a seguinte construção:

- i. Faça $L'(a) = L(a)$ e $L'(b) = L(b)$;

- ii. Crie $L'(c-1)$ selecionando $(c-1)$ linhas consecutivas de $L(c-1)$ (a partir da segunda linha);
- iii. Crie $L'(d)$ selecionando d linhas consecutivas de $L(d)$ (a partir da segunda linha).

Novamente nossas matrizes são quadradas. Note que a primeira linha das matrizes $L(c-1)$ e $L(d)$ não segue a construção exigida para uma matriz genérica M mostrada na Seção 6.2.4 para o algoritmo Pinta Clique, portanto, esta linha não pode ser usada para construir $L'(c-1)$ ou $L'(d)$. Portanto, só temos como escolher $c+d-4$ linhas de $L(c-1)$ e de $L(d)$.

Como $d \geq 3$ temos que $c+d-4 \geq c-1$, ou seja, é possível selecionar $c-1$ linhas consecutivas de $L(c-1)$ e construir $L'(c-1)$. Por outro lado, $c \geq 4$. Assim, temos $c+d-4 \geq d$. Também conseguiremos d linhas consecutivas de $L(d)$ para construir $L'(d)$.

Usaremos, agora, o algoritmo “Pinta Clique” para colorir as arestas de H que ainda não foram pintadas.

Algoritmo “Pinta Cliques de H ”

Pinta Clique($G[\beta(1,1)]$, $L'(a)$);
 Pinta Clique($G[\beta(1,2)]$, $L'(b)$);
 Pinta Clique($G[\beta(2,1)]$, $L'(c-1)$);
 Pinta Clique($G[\beta(2,2)]$, $L'(d)$).

Segundo o Lema 16, conseguimos pintar as cliques $G[\beta(1,1)]$, $G[\beta(1,2)]$, $G[\beta(2,1)]$ e $G[\beta(2,2)]$ com as matrizes $L'(a)$, $L'(b-1)$, $L'(c)$ e $L'(d)$, respectivamente. \square

Assim sendo, considere $L'(c-1)$ uma matriz formada pelas $c-1$ linhas consecutivas de $L(c-1)$ a partir da segunda linha e $L'(d)$ uma matriz formada pelas d linhas consecutivas de $L(d)$ também a partir da segunda linha.

Neste nosso caso, teremos

- $I(a) = \{\Delta(G) - 1, 1\}$;
- $I(b) = \{2, 4\}$ e
- $C = \{3, 4, \dots, c+1\}$.

Observe que $\Delta(G) - 1 = c + d$. Como $c \geq 4$, a única cor que se repete é a 4, pois C é uma seqüência crescente de 3 até $c+1$.

Novamente, teremos uma situação ideal quando todas as cores escolhidas para $I(a)$, $I(b)$ e C forem diferentes duas a duas e suficientes para colorir o vértice z a ser inserido em H para construir G .

Faremos, então, uma mudança na coloração feita em B , para que a cor 4 não mais “apareça” duas vezes entre as cores escolhidas.

Lema 31 *Se $c \geq 5$, é possível escolher $L'(d)$ de tal forma que a cor 4 seja livre nos vértices de $\beta(2, 2)$ após o uso do algoritmo “Pinta Cliques”.*

Prova: A ordem da matriz $L(d)$ é $(c + d - 3) \times d$. A primeira linha não pode fazer parte de $L'(d)$, pois caso contrário, como $L'(d)$ é formada por d linhas consecutivas de $L(d)$, não seria possível pintar $\beta(2, 2)$ com as cores em $L'(d)$. Com $c \geq 5$, teremos $c + d - 4 \geq d + 1$. Dessa forma, teremos como escolher $d + 1$ linhas consecutivas de $L(d)$.

Analisemos a matriz $L(d)$

$$\begin{pmatrix} c+2 & c+3 & \cdots & \Delta(G)-2 & \Delta(G)-1 & \Delta(G) \\ (c+5) \bmod \Delta(G) & (c+6) \bmod \Delta(G) & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ (c+6) \bmod \Delta(G) & (c+7) \bmod \Delta(G) & \cdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c-2 & c-1 & \cdots & c+d-5 & c+d-4 & c+d-3 \\ c-1 & c & \cdots & c+d-4 & c+d-3 & c+d-2 \end{pmatrix}.$$

Escolhemos $d + 1$ linhas consecutivas a partir da segunda linha de $L(d)$. Logo, teremos 3 sendo a primeira cor da última coluna de $L'(d)$. Como $L'(d)$ é $d \times d + 1$, a cor 4 será a última cor da primeira coluna de $L'(d)$. Esta diagonal de *alcance* d que possui todas as cores iguais a 4 não vai ser usada, pois tem o mesmo alcance da diagonal de cor 3 e o algoritmo *Pinta Clique* sempre escolhe a menor cor. \square

Veja abaixo as matrizes para o cografo 2253 da Figura 6.9.

$$L'(a) = \left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \right), L'(b) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right),$$

$$L'(c-1) = \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right), L'(d) = \left(\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

Para finalizar o algoritmo para pintar os cografos da forma $22cd$, faça

- $(u_4, w_{d-3}) \leftarrow \text{cor } 4$;
- $I(b) \leftarrow \{2, c + d + 1\}$.

Ou seja, estamos trocando a cor da aresta (u_4, w_{d-2}) (cor $c + d + 1$) pela cor que estava livre em ambos os vértices u_4 e w_{d-2} (cor 4). Além disso, trocamos a cor 4 que estava em

$I(b)$ por $c + d + 1$. Uma mudança de tarefas, a cor 4 assume a tarefa que a cor $c + d + 1$ assumia nos vértices citados e vice-versa.

Teorema 21 *Seja G um cografo $22cd$, com $c \geq 5$ e $d \geq 3$. Então, conseguimos pintar as arestas de G com $\Delta(22cd)$ cores.*

Prova: Seja $H = 22(c-1)d$ e $B = B(\alpha_H(1), \alpha_H(2))$. Pinte as arestas de B usando o algoritmo “Pula 1”.

Como $d \geq 3$, pelo Corolário 14, usando as matrizes de cores livres nos vértices de $\beta(1,1)$, $\beta(1,2)$ e $\beta(2,1)$, $L(a)$, $L(b)$ e $L(c-1)$, conseguimos colorir as cliques geradas por estes elementos da β -partição de H .

Como $c \geq 5$, pelo Lema 31 conseguimos construir $L'(d)$ com $d + 1$ linhas para colorir a clique gerada pelos vértices de $\beta(2,2)$ e ainda deixar a cor 4 livre estes vértices. Faça $(u_4, w_{d-3}) \leftarrow \text{cor } 4$. Assim, temos $I(a) = \{\Delta(G) - 1, 1\}$, $I'(b) = \{2, c + d + 1\}$ e $C = \{3, 4, \dots, c + 1\}$.

Como $c \geq 5$, $\Delta(G) - 1 = c + d \neq c + 1$. Além disso $\Delta(G) - 1 = c + d \neq c + d + 1$. Assim sendo, as cores em $I(a)$, $I(b)$ e C são diferentes duas a duas.

Conseguimos, então, $c + 3$ cores diferentes livres em cada vértice de $\alpha_H(1) \cup \beta_H(1,2)$. Coloque o vértice z para construir G . Pinte as arestas do tipo (z, x) com $x \in \alpha(1) \cup \beta_H(1,2)$ com a cores em $I(a)$, $I(b)$ e C . \square

O algoritmo mostrado no Teorema 21 pinta somente as arestas dos cografos $22cd$ que possuem $c \geq 5$ e $d \geq 3$.

Se G é um cografo da forma $223d$ ou $224d$ com $d \geq 5$, podemos usar o algoritmo do Teorema 21 para colorir o cografo $22d3$ ou $22d4$, respectivamente.

Para o cografo 2243 temos uma coloração usando Δ cores mostrada na Figura 6.10.

Os cografos $222d$ com d ímpar são *SO*. De fato, pelo Teorema 15, temos que um cografo G dessa forma é *O* se e somente se $\Delta(G) > ab + 2cd - b(b + c + d)$, ou seja, $d + 3 > 2d - 4$. Portanto, G é *O* se e somente se $d \leq 5$. Ainda, G é *NO* se e somente se $\Delta(G) > 2ab$. Em outras palavras, $d + 3 > 8$. Assim sendo, G é *NO* se e somente se $d > 5$.

Os cografos 2222 , 2233 e 2244 têm suas arestas coloridas na Seção 6.2.8.

Com as técnicas usadas nesta dissertação não classificamos os cografos $222d$ com d par. Note que estes cografos não são *overfull*.

Todos os cografos $22cd$ possuem $\Delta = n - 3$. Assim sendo, podemos usar a solução para colorir grafos não *overfull* com $\Delta \geq n - 3$ dada por Hilton e Chetwynd ([5]).

6.2.8 Cografos $abcd$ com $a = b$ e $c = d$

O último resultado que obtivemos em nossa pesquisa foi acerca dos cografos $abcd$ que possuem $a = b$ e $c = d$. O resultado apresentado nesta seção foi desenvolvido usando uma

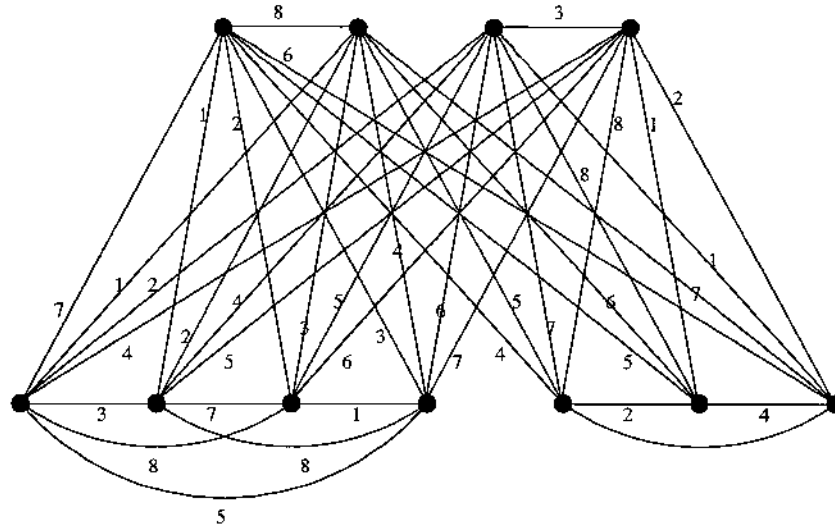


Figura 6.10: Coloração usando Δ cores para o cografo 2243.

outra técnica de coloração.

Em vez de pintar um grafo H com $V(H) = V(G) - 1$ com $\Delta(G)$ cores, particionamos o conjunto de arestas de G em quatro elementos. Na verdade, pintaremos as arestas de duas cliques e de dois grafos bipartidos. Para ambos, clique ou bipartido, sabemos exibir uma coloração para suas arestas.

Sem perda de generalidades, suponha $p(1) \leq p(2)$, ou seja, $a \leq c$.

Observe a Figura 6.11 e repare como o conjunto das arestas do cografo mostrado pode ser particionado.

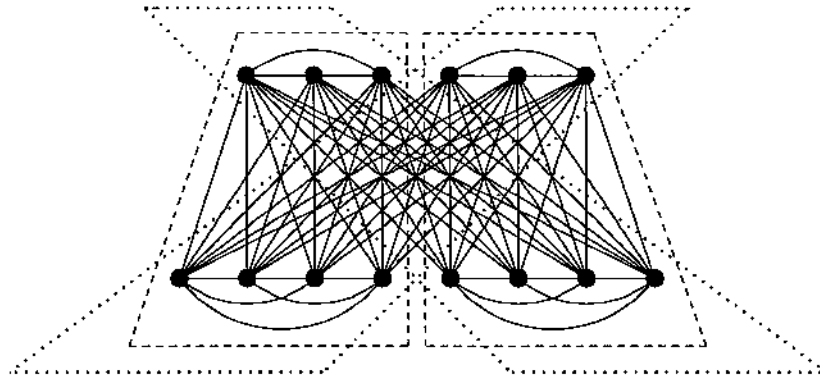


Figura 6.11: Cografo 3344 e a partição de suas arestas.

- i. Duas cliques de tamanho $a + c$ disjuntas nos vértices e nas arestas: (trapézios tracejados)

$C' = G[\beta(1,1) \cup \beta(2,1)]$ e $C'' = G[\beta(1,2) \cup \beta(2,2)]$, respectivamente;

- ii. Dois grafos bipartidos completos de tamanho $a + c$ também disjuntos nos vértices e nas arestas: (trapézios pontilhados)

$B' = G[\beta(1, 1) \cup \beta(2, 2)]$ e $B'' = G[\beta(1, 2) \cup \beta(2, 1)]$, respectivamente.

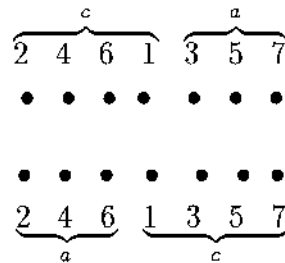
Observe que $\Delta(C') = \Delta(C'') = a + c - 1$ e $\Delta(B') = \Delta(B'') = c$.

Seja a coloração dada pelo teorema abaixo.

Teorema 22 *Seja G um cografo $abcd$ com $a = b$ e $c = d$ com $a \leq c$, então G pertence à Classe 1.*

Prova: Para G , poderemos ter dois casos:

- Se $a + c$ é par
 - Use as $a + c - 1$ primeiras cores para pintar as arestas de C' e C'' . Dentre as $a + 2c - 1$ cores existentes para colorir G , ainda ficam livres c cores nos vértice de $\alpha(1)$ e de $\alpha(2)$;
 - Use estas c cores para colorir as arestas de B' e B'' .
- Caso contrário ($a + c$ ímpar)
 - Use as $a + c$ primeiras cores para pintar as arestas de C' e C'' . Dentre as $a + 2c - 1$ cores existentes para colorir G , ainda ficam livres $c - 1$ cores para os vértices de $\alpha(1)$ e de $\alpha(2)$;
 - Em cada vértice de C' e C'' sobra uma cor, independentemente da coloração usada. Veja a ilustração abaixo com $a = 3$ e $c = 4$. Suponha que na fileira de cima estão os vértices de C' e na fileira de baixo, os vértices de C'' . Suponha que para colorir os vértices de C' e C'' usamos a técnica definida em [9]. Ordene as fileiras de tal forma que os vértices de C' e C'' que pertencem à B' antecedam os que pertencem à B'' .



O esquema mostrado acima, organiza os vértices das duas cliques fazendo com que as a últimas cores livres de C' se repitam nas c últimas cores livres de C'' e que as a primeiras cores livres de C'' se repitam nas c primeiras cores de C' .

Para isto, basta fazer que a coloração dada a C'' seja, na verdade, uma rotação da coloração feita em C' .

Note que os a vértices de B' e os a vértices de B'' inicialmente possuem grau c . Sendo $a + c$ ímpar, tem-se que $c > a$ e $\Delta(B') = \Delta(B'') = c$.

- Considere, agora, B' e B'' . Pinte as a arestas de B' e B'' que possuem cor livre i em ambos os extremos com a cor i e retire estas arestas de B' e B'' , originando os grafos B'_1 e B''_1 . Estes grafos são bipartidos e possuem $\Delta = c - 1$.
- Use as $c - 1$ cores restantes para colorir as arestas de B' e B'' .

□

Além deste resultado, o Teorema 22 sugere o corolário abaixo.

Corolário 15 *Seja G um cografo $abcd$ com $a = b = c = d$, então G pertence à Classe 1.*

6.3 Comentários

Além de provarmos que cografos de *cotree* completa de nível 3 são *SO* se e somente se são *O* ou *NO* (Capítulo 5 e [1]), exibimos uma coloração para alguns destes cografos que não são *SO*.

As árvores das Figura 6.12 e 6.13 mostram os resultados que conquistamos para, respectivamente, cografos $abcd$ com $a = b$ e cografos $abcd$ com $a > b$. Estas árvores também mostram o que se encontra em aberto.

6.4 Resumo

Os principais algoritmos de coloração de arestas desenvolvidos nos meses de pesquisa são exibidos neste capítulo.

Alguns destes algoritmos possuem uma intersecção no conjunto de grafos de entrada; é o que mostra as árvores da última seção.

Como previsto, conseguimos colorir com Δ cores alguns conjuntos de cografos de *cotree* completa de nível 3 e com dois ramos que não são *SO*, provando, assim, mais uma evidência para a conjectura de *Hilton* e *Chetwynd*.

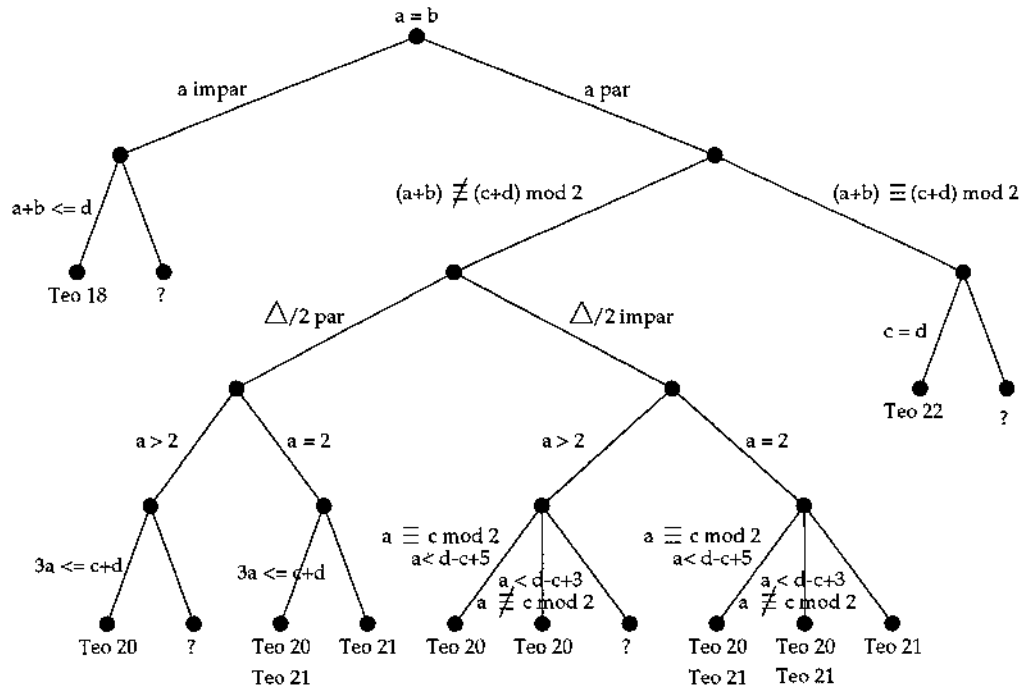


Figura 6.12: Cografos $abcd$ com $a = b$ e a situação em relação a coloração de arestas.

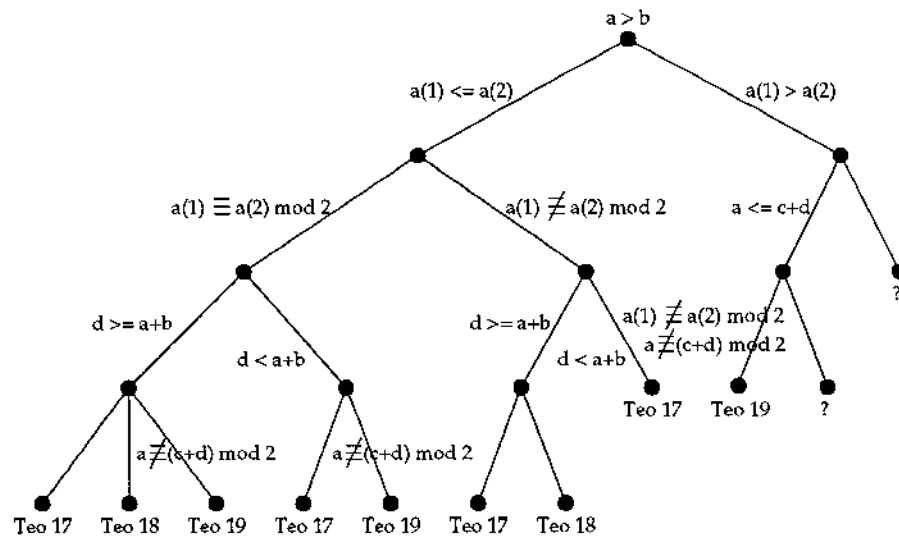


Figura 6.13: Cografos $abcd$ com $a > b$ e a situação em relação a coloração de arestas.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação estudamos o problema da coloração de arestas na família dos cografos.

Provamos que a família dos cografos pode ser usada como mais uma evidência para a Conjectura de *Hilton e Chetwynd* (Teorema 12).

Em relação aos cografos de *cotree* completa de nível 3, estudamos condições para que estes grafos sejam *SO* (Teorema 15). Restringindo para dois o número de ramos das *cotrees* dos cografos estudados, pintamos com Δ cores alguns subconjuntos destes cografos (Capítulo 6). Mostramos também que alguns cografos de *cotree* completa de nível 3 com mais de dois ramos podem ser reduzidos àqueles com *cotree* completa de nível 3 de apenas dois ramos (Lema 13). Com isso, colorimos também com Δ cores as arestas de muitos cografos que não aparecem explicitamente nas condições traçadas pelos teoremas de cada algoritmo.

É observado que todo algoritmo mostrado cobre um determinado subconjunto dos cografos citados. Muitas vezes, notamos que alguns destes subconjuntos se sobrepõem.

Uma provável abordagem futura poderia ser a tentativa de unificar os algoritmos desta dissertação. Esta abordagem pode, inclusive, encontrar a solução para outros cografos não *SO*.

Por outro lado, pode-se pesquisar sobre a possibilidade de estender alguns destes algoritmos para a coloração de cografos de *cotree* de nível 3 que não seja completa, ou que possua mais de dois ramos. Além disso, verificar o comportamento e, possivelmente, a coloração de arestas para aqueles cografos de *cotree* completa de nível 4, 5, 6 e assim por diante.

Bibliografia

- [1] M. M. Barbosa, C. P. Mello, and J. Meidanis. Uma subclasse subgrafo-overfull dos cografos. Technical Report 97-17, Unicamp, Campinas, SP, Brasil, October 1997. Submetido a *Congressus Numerantium*.
- [2] L. Cai and J. A. Ellis. NP-Completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 30:15–27, 1991.
- [3] B. Chen, H. Fu, and M. T. Ko. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17:137–146, 1995.
- [4] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. Snarks e supersnarks. In *Proceedings of Fourth International Conference*, pages 215–241, 1981.
- [5] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. The edge-chromatic class of graphs with maximum degree at least $|V|-3$. *Annals of Discrete Mathematics*, 41:91–110, 1989.
- [6] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3:163–174, 1981.
- [7] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *Siam Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.
- [8] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. A greedy method for edge-colouring odd maximum degree doubly chordal graphs. *Congressus Numerantium*, 111:170–176, May 1995.
- [9] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. *Theoretical Computer Science*, 181:91–106, 1997.
- [10] C. M. H. Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. Mello. Local conditions for edge-colouring. *Anais da II Oficina Nacional em Problemas Combinatórios: Teoria, Algoritmos e Aplicações*, 1995. Aceito para publicação em *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*.

- [11] C. M. H. Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. Mello. Coloração em grafos. In *XVI Jornada de Atualização em Informática*, pages 39–83. Sociedade Brasileira de Computação, 1997.
- [12] S. Fiorini and R. J. Wilson. *Edge-Colouring of Graphs*. Pitman, London, 1977.
- [13] M. Gardner. Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem. *Scientific American*, 234:126–130, 1976.
- [14] D. G. Hoffman and C. A. Rodger. The chromatic index of complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16(2):159–163, 1992.
- [15] I. Holyer. The NP-completeness of edge-colouring. *Siam Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.
- [16] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1995.
- [17] M. Kochol. Snarks without small cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 67:34–47, 1996.
- [18] T. Niessen. How to find overfull subgraphs in graphs with large maximum degree. *Discrete Applied Mathematics*, 51:117–125, 1994.
- [19] C. Ortiz, N. Maculan, and J. L. Szwarcfiter. Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. November, 1995. Aceito para publicação em *Discrete Applied Mathematics*.
- [20] M. J. Plantholt. The chromatic index of graphs with a spanning star. *Journal of Graph Theory*, 5:45–53, 1981.
- [21] D. Seinsche. On a property of the class of n -colorable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 16:191–193, 1974.
- [22] P. G. Tait. [Remarks on the colouring of maps]. *Proceedings of Royal Society Edinburgh*, 10:501–503, 1880.